Meetkunde-werkblad
De stelling van Ptolemaeus

0. Vooraf

- Bij dit werkblad wordt kennis verondersteld van de eigenschappen van middelpuntshoeken en omtrekshoeken van cirkels, van de elementaire eigenschappen van de koordenvierhoek en ook van enige goniometrie.
- Deelopdrachten voorafgegaan door 🗎 moeten op een uitwerkingenblad worden beantwoord.

1. Inleiding

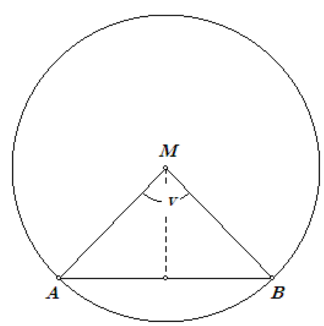
Ptolemaeus (*Klaudios Ptolemaios*, ca. 85-165, Alexandrië) was in de eerste plaats een astronoom, maar daarbij ook wiskundige. Hij publiceerde vermoedelijk rond het jaar 150 een dertiendelig boek, de *Almagest*, waarin hij de stand van de astronomie in zijn tijd beschreef. Het is één van de belangrijkste wetenschappelijke documenten uit de oudheid. Maar Ptolemaeus schreef ook over geografie, cartografie, muziek en, in het laatst van zijn leven, over optica. Zijn in het Grieks geschreven geschriften zijn, weliswaar niet oorspronkelijk, bewaard gebleven; en daarnaast bestaan er ook vertalingen in het Arabisch en in het Latijn.

Opdracht 1

🗎 Zoek op internet de ontstaansgeschiedenis van de naam '*Almagest*' en geef daarvan een korte samenvatting. Vermeld daarbij ook de geraadpleegde internetbronnen. ♦

Bij zijn astronomische berekeningen gebruikte Ptolemaeus een zogenoemde *koordentabel*, waarin de lengtes van de koorden in een cirkel met vaste middellijn van 120 eenheden stonden, afhankelijk van de grootte van de middelpuntshoek bij een koorde. Deze zeer nauwkeurige tabel liep met stapjes van ½° op, beginnend bij ½° en eindigend bij 180°.
In dit werkblad zullen we onder meer ook onze eigen koordentabel samenstellen, ongeveer op dezelfde manier als Ptolemaeus dat deed. En als we daarbij een cirkel gebruiken, dan is de straal van die cirkel altijd gelijk aan 60!

Opdracht 2



In de figuur hiernaast staat een cirkel met middelpunt M en met straal $MA = MB = 60$ eenheden.
Verder is $\angle AMB = v$.

🗎 Leg uit waarom $AB = 120 \sin(\frac{1}{2}v)$.

🗎 Vul in de volgende tabel de lengtes in van de koorde AB (met waarden in 5 decimalen) bij de genoemde middelpuntshoek v.
Opmerking. Je mag de berekeningen natuurlijk uitvoeren met behulp van een rekenmachine (let op: graden!).

v	lengte van AB
0°	
36°	
60°	
72°	
180°	

Nb. Dit is het begin van je eigen koordentabel [1]. ♦

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

Ptolemaeus beschikte over middelen om deze waarden onafhankelijk van zijn koordentabel (die was, net als die van jou, ook nog leeg) uit te rekenen. Voor verdere berekeningen had hij echter formules nodig; bijvoorbeeld om de lengte van de koorde bij v = 12° af te leiden uit die van de koorden bij v = 72°en bij v = 60°. Hij kende 'onze' formule AB = 120 sin(½v) natuurlijk niet.

Afspraak. Om de lengte van de koorde bij een bepaalde middelpuntshoek handig te kunnen schrijven zullen we gebruik maken van een functievoorschrift:
- krd(v) = a betekent: de lengte van de koorde bij de middelpuntshoek v (in graden) is gelijk aan a; of korter: de koorde bij hoek v is (gelijk aan) a.

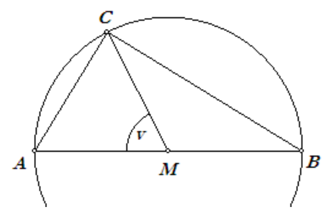
Opdracht 3

Met deze notatie luidt één van de door Ptolemaeus gebruikte (beter is: beschreven) formules (in moderne schrijfwijze) [2]:

$$(\text{krd}(v))^2 + (\text{krd}(180° - v)^2 = 120^2$$

of, met minder haakjes:

$$\mathbf{krd^2(\mathit{v}) + krd^2(180° - \mathit{v}) = 120^2}$$



🗎 Geef een verklaring voor de juistheid van deze formule; zie de figuur hiernaast.

🗎 Bereken met behulp van *deze* formule, uitgaande van de reeds berekende waarden van de koorden in de tabel van Opdracht 2, de lengte van de koorde bij *drie* nog niet genoemde middelpuntshoeken. Laat daarbij duidelijk zien *hoe* je de formule hebt gebruikt!
Aanwijzing. Kies v opvolgend gelijk aan 36°, 60°, 72°. ♦

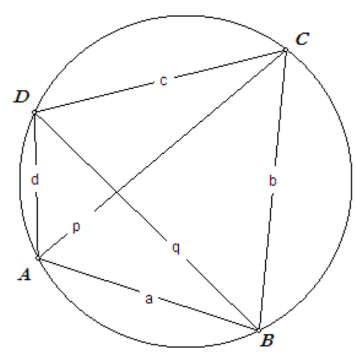
Opmerking. Zie paragraaf 10, Appendix C, voor de Griekse manier van worteltrekken. ♦

Ten behoeve van een formule waarmee bijvoorbeeld krd(12°) = krd(72° – 60°) kan worden berekend, leidde Ptolemaeus een meetkundige stelling af die later naar hem genoemd is: de *stelling van Ptolemaeus*.
Verderop in dit werkblad (in Opdracht 7 t/m 11) zullen we die stelling bewijzen, maar eerst proberen we door lengtemeting de bedoelde eigenschap te vinden (zeg maar experimenteel).

2. De stelling van Ptolemaeus

Opdracht 4

In de figuur hiernaast zie je een koordenvierhoek $ABCD$.
Dezelfde figuur staat vergroot in paragraaf 8, Appendix A.



- Meet ***in de figuur in die paragraaf*** de lengtes van de zijden a, b, c, d van de vierhoek en meet ook de lengtes p en q van de diagonalen (in millimeters).

🗎 Bereken daarna $p \cdot q$ (p maal q).

🗎 En bereken ook de producten $a \cdot b$, $a \cdot c$, $a \cdot d$, $b \cdot c$, $b \cdot d$ en $c \cdot d$.

Het product van twee lijnstukken kan altijd worden opgevat als de *oppervlakte van een rechthoek* met die lijnstukken als zijden. Dat was trouwens gebruikelijk in Ptolemaeus' tijd (en ook in de tijd ervoor). Je hebt hierboven dus de oppervlaktes van 1 + 6 rechthoeken berekend.

🗎 Er is een verband tussen de oppervlakte pq en **twee** van de andere zes berekende oppervlaktes. Welk verband is dat?
Aanwijzing. Vul aan: pq = … ♦

Opdracht 5a

De stelling van Ptolemaeus luidt in woorden:

Het product van de lengtes van de diagonalen van een koordenvierhoek is gelijk aan de som van de producten van de lengtes van de paren overstaande zijden.

- Ga na of dit overeenkomt met hetgeen je hierboven (in Opdracht 4) zelf hebt gevonden. Als dat niet het geval is, onderzoek dan of je wellicht meet- en/of rekenfouten hebt gemaakt. En verbeter die zo nodig! ♦

Afspraak. Als we de middelpuntshoek bij een bepaalde koorde *AB* *niet* met een letter hebben aangegeven, dan zouden we kunnen schrijven: krd(bg(*AB*)), immers de middelpuntshoek bij die koorde is gelijk aan bg(*AB*); zie de figuur bij Opdracht 2. We schrijven evenwel iets korter: **krd**(*AB*). We spreken dit uit of lezen dit als "de koorde op de boog *AB* ".

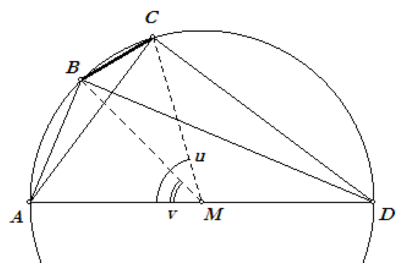
Opdracht 5b

In de figuur hiernaast is *AD* een middellijn van de cirkel. Op de cirkel liggen de punten *B* en *C*. We gaan er verder van uit dat we *weten* (dat *gegeven* is):

krd(u) = krd(AC) = c en krd(v) = krd(AB) = b

Iemand merkt hierbij nu op: "Maar dan weten we ook hoe groot krd(BD) en krd(CD) zijn!"

🖹 Verklaar waarom die persoon gelijk heeft.



In bovenstaande figuur geldt:

$$BC \cdot AD = AC \cdot BD - AB \cdot CD \qquad (1)$$

🖹 Waarom is dit juist?

🖹 Hoeveel onbekenden komen er nu voor in de uitdrukking die aangegeven is met (1)? Welke zijn (is) dat? ♦

De formule die kan worden afgeleid uit uitdrukking (1) en die door Ptolemaeus daadwerkelijk werd gebruikt, luidt nu (in moderne notatie):

$$\mathbf{krd}(u - v) \cdot \mathbf{krd}(180°) = \mathbf{krd}(u) \cdot \mathbf{krd}(180° - v) - \mathbf{krd}(v) \cdot \mathbf{krd}(180° - u) \qquad (2)$$

Opdracht 6a

🖹 Geef een korte verklaring voor de juistheid van formule (2), kijkend naar uitdrukking (1).

🖹 Bereken met behulp van formule (2) de waarde van krd(12°).
Aanwijzing. krd(12°) = krd(72° – 60°).

🖹 Bereken op dezelfde manier ook krd(24°) en krd(48°).
Aanwijzing. Gebruik de reeds berekende waarden van krd(36°) en krd(60°).

🖹 Kun je met *deze* formule krd(90°) berekenen? Verklaar je antwoord. ♦

Opdracht 6b

In Opdracht 6a heb je wellicht je hoofd gebroken over het berekenen van krd(90°). Vandaar…

🖹 Bereken krd(90°). Laat daarbij duidelijk zien hoe je de berekening hebt uitgevoerd.
Aanwijzing. Teken een vierkant in een cirkel of kijk nog eens naar Opdracht 2.
Antwoord: krd(90°) = 84,85281.

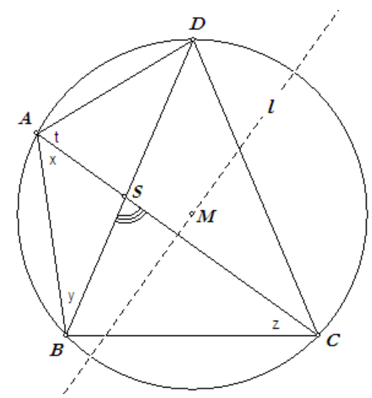
🖹 Je weet hoe groot krd(108°) is (zie Opdracht 3). Bereken nu krd(18°).

Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

3. Het bewijs van de stelling

We zullen nu in een aantal stappen de *stelling van Ptolemaeus* gaan bewijzen, echter *niet* op de manier waarop Ptolemaeus dat heeft gedaan in zijn *Almagest*.
Er zijn overigens niet zo veel manieren waarop die stelling kan worden bewezen [3]. Wij kiezen hier voor een bewijs dat gebaseerd is op de oppervlaktes van de vier driehoeken waarin een koordenvierhoek door de diagonalen wordt verdeeld.

Opdracht 7



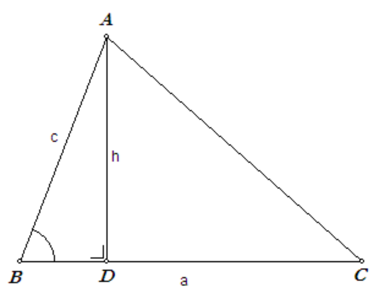
- Neem de nevenstaande tekening (zonodig iets vergroot) over op je uitwerkingenblad.

In de figuur is de grootte van enkele hoeken aangegeven met de letters x, y, z, t.
In die figuur is de lijn l de middelloodlijn van het lijnstuk AC.
We zullen de lijn l later (in Opdracht 10) gebruiken.

- Bewijs eerst dat $\angle BSC = x + y$.
- Enkele andere hoeken in de figuur kunnen ook met x, y, z, t worden aangegeven. Doe dat.
- Waarom is $\sin \angle ASB = \sin \angle BSC$?
- Wat kan je dus zeggen van de sinussen van de vier hoeken rond het punt S ?

Opdracht 8 – Tussenspel 1

We zullen nu een (mogelijk niet zo bekende) formule bewijzen voor de *oppervlakte* van een driehoek. Die formule wordt dan gebruikt bij het bewijs van de stelling van Ptolemaeus.



In driehoek ABC in de figuur hiernaast is BC = a en $AB = c$.
AD is de hoogtelijn van A, waarbij $AD = h$.
Met $\mathcal{F}(ABC)$ geven we de *oppervlakte* van driehoek ABC aan.
Zoals bekend is dan:

$$\mathcal{F}(ABC) = ½ \cdot a \cdot h$$

- Bewijs nu dat ook geldt:

$$\mathcal{F}(ABC) = ½\, ac \sin(B) \qquad (3)$$

Of in woorden:

De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijden en de sinus van de door die zijden ingesloten hoek. ♦

We kunnen de oppervlakte $\mathcal{F}(ABCD)$ van de koordenvierhoek $ABCD$ schrijven als som van de oppervlakten van de driehoeken SAB, SBC, SCD, SDA:

$$\mathcal{F}(ABCD) = \mathcal{F}(SAB) + \mathcal{F}(SBC) + \mathcal{F}(SCD) + \mathcal{F}(SDA) \qquad (4)$$

Opdracht 9

We stellen in vierhoek $ABCD$ (zoals ook gedaan is in Opdracht 4): $AC = p$ en $BD = q$.

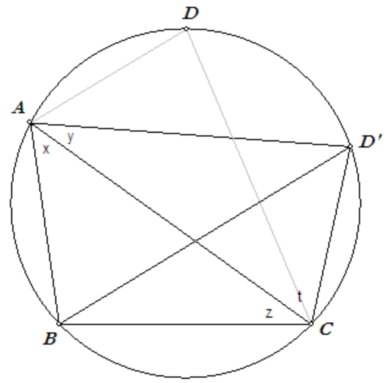
- Druk $\mathcal{F}(SAB)$ op basis van formule (3) uit in (onder meer) de lijnstukken SA en SB.
- Druk $\mathcal{F}(SBC)$ uit in (onder meer) de lijnstukken SB en SC.
- Geef overeenkomstige uitdrukkingen voor $\mathcal{F}(SCD)$ en $\mathcal{F}(SDA)$.
- Bewijs nu dat $\mathcal{F}(ABCD) = ½\, pq \sin(x + y)$. (5)
  Aanwijzing. Kijk ook nog eens naar wat je bij Opdracht 7 hebt gedaan. ♦

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

Opdracht 10

Bekijk nu weer de figuur bij Opdracht 7.

- Waarom gaat de lijn l door het middelpunt M van de cirkel?
- Als je het punt A spiegelt in de lijn l, waarom is C dan het beeldpunt van A ?
- Spiegel nu het punt D in de lijn l. Het beeldpunt van D noemen we D'.
  Waarom ligt het punt D' ook op de cirkel?



- Maak een *tweede* tekening (zoals in Opdracht 7), waaruit je echter de driehoek ACD weglaat, maar waarin de driehoek ACD' wel getekend is.
  Teken daarin ook het lijnstuk BD'.

Als het goed is, krijg je dan nevenstaande figuur.

- Wat weet je van $\mathcal{F}(ABCD)$ en $\mathcal{F}(ABCD')$?
- Waarom is hier $\angle\ CAD' = y$ en $\angle\ ACD' = t$?
- Waarom is $\sin \angle\ BAD' = \sin(x + y) = \sin \angle\ BCD'$?

Opdracht 11

We hadden in vierhoek $ABCD$ (zie Opdracht 4): $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ en $DA = d$.

- In vierhoek $ABCD'$ is $CD' = d$ en $AD' = c$. Geef daarvoor een verklaring.
- Druk $\mathcal{F}(ABD')$ op basis van formule (3) uit in (onder meer) a en c.
- Druk $\mathcal{F}(BCD')$ uit in (onder meer) b en d.
- Waarom is dan: $\qquad \mathcal{F}(ABCD') = \frac{1}{2}\,(ac + bd)\sin(x + y)$? (6)
- Welke conclusie kun je nu trekken uit (5) en (6)? Geef daarop een korte toelichting. ♦

En hiermee is de stelling van Ptolemaeus bewezen. In hetgeen volgt kunnen we dus gebruik maken van de formules:

$$\mathbf{krd}(u - v) \cdot \mathbf{krd}(180°) = \mathbf{krd}(u) \cdot \mathbf{krd}(180° - v) - \mathbf{krd}(v) \cdot \mathbf{krd}(180° - u)$$
$$\mathbf{krd}^2(v) + \mathbf{krd}^2(180° - v) = 120^2$$

Opdracht 12

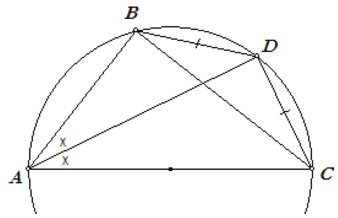
- Van welke middelpuntshoeken heb je hierboven nu zelf de bijbehorende koorden al berekend?
- Nu je krd(12°) weet (zie Opdracht 6a), kan je met formule (2) ook een aantal andere waarden van je koordentabel berekenen. Doe dat.
- Laat zien dat je nu alle koorden kunt berekenen die horen bij middelpuntshoeken tussen 0° en 180°, oplopend met stappen van 6°. ♦

4. Een halveringsformule

Op basis van de tot hier genoemde, aan Ptolemaeus bekende formules kan je bijvoorbeeld krd(3°) *niet* uitrekenen (ga dat zelf ook na!). Maar Ptolemaeus vond een manier om uit een *gegeven* krd(v) de waarde van krd($\frac{1}{2}v$) te berekenen. En daarnaar kijken we in de volgende opdrachten (zie de Opdrachten 13 t/m 16).

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

Opdracht 13

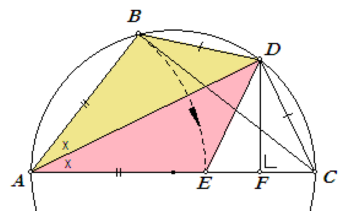


En de hiernaast staande figuur, waarin AC een middellijn is van de cirkel, is de grootte van bg(BC) bekend: zeg dat bg(BC) = v. Het punt D is het midden van de boog BC.

- Waarom is hier $\angle BAD = \angle DAF$ (= x) ?
- Waarom is bg(AB) = 180° - v ?
- Welke verband bestaat er tussen x en v ?
  Aanwijzing. Vul aan: v = …
- Waarom is krd(BD) = krd(CD)? ♦

We gaan nu op zoek naar een formule waarmee krd($2x$) = krd(CD) berekend kan worden uit de gegeven waarde v : we willen krd(CD) uitdrukken in v. Zo'n formule wordt wel *halveringsformule* genoemd.

Opdracht 14

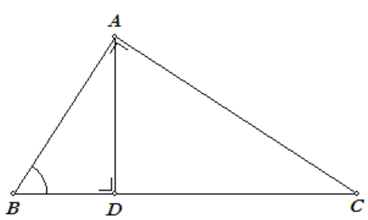


Bekijk de hiernaast staande figuur (het is een uitbreiding van de figuur bij Opdracht 13). Het punt E is hier op de lijn AC zó gekozen, dat $AE = AB$. Ook is het lijnstuk DE getekend.

- Waarom zijn de driehoeken AED en ABD congruent?
  Let wel. Je weet op dit moment (nog) niet dat $AEDB$ een *ruit* is. Je moet dus echt naar drie kenmerken voor congruentie zoeken. En die zijn er!
- Als we ook de loodlijn DF op AC tekenen, dan is F het midden van CE. Waarom?
- Wat voor soort driehoek (*scherp*-, *recht*- of *stomphoekig*) is driehoek ADC? Verklaar je antwoord. ♦

En hier onderbreken we heel even het zoeken naar de halveringsformule. We willen namelijk gebruik kunnen maken van een eigenschap die geldt in rechthoekige driehoeken.

Opdracht 15 – Tussenspel 2



In de in A rechthoekige driehoek ABC is AD de hoogtelijn uit het hoekpunt A.

Nu geldt: $AB^2 = BC \cdot BD$ (7a)

Het lijnstuk BD heet hier wel de *loodrechte projectie* van AB op BC ; en BC is hier de grootste (ook wel schuine) zijde van de driehoek.

Eigenschap (7a) luidt in woorden:

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van een rechthoekszijde (hier AB) *gelijk aan het product van de grootste zijde* (hier BC) *en* (*van*) *de projectie van die rechthoekszijde op de grootste zijde* (hier BD). (7b)

Natuurlijk moet je eigenschap (7) bewijzen. En dat is niet zo moeilijk.

- Bereken cos B in driehoek ABC én bereken cos B in driehoek BDA.
  Wat is dan je conclusie?
- Waarom geldt in deze driehoek ABC ook: $AC^2 = CB \cdot CD$? ♦

En dan hebben we de halveringsformule, waarnaar we op zoek waren, bijna gevonden!

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

Opdracht 16

Kijk nu weer naar de figuur bij Opdracht 14.

- Toon met behulp van eigenschap 7 aan dat in driehoek ACD (in die figuur) geldt:

$$CD^2 = \tfrac{1}{2} \cdot AC \cdot (AC - AB) \qquad (8)$$

Aanwijzing. Kijk ook nog eens naar je antwoorden bij Opdracht 14. ♦

Omdat bg(CD) = $\tfrac{1}{2}v$ is, kan formule (8) geschreven worden als:

$$\mathbf{krd}^2(\tfrac{1}{2}v) = \tfrac{1}{2} \cdot \mathbf{krd}(180°) \cdot \big(\mathbf{krd}(180°) - \mathbf{krd}(180° - v)\big) \qquad (9)$$

In formule (9) zien we dat krd($\tfrac{1}{2}v$), weliswaar als kwadraat, is uitgedrukt in v, waarbij v = bg(BC). Dus is er inderdaad sprake van een halveringsformule.

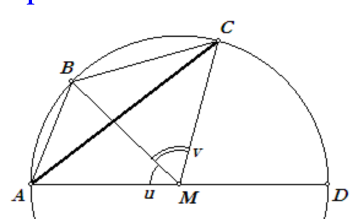
Opdracht 17

- Geef een korte toelichting op het verband tussen eigenschap (8) en formule (9).
- Laat met behulp van formule (9) zien dat krd(3°) = 3,14123.
  Aanwijzing. Denk om de noodzakelijke worteltrekking!
- Bereken met formule (9) de waarden van krd(1½°) en krd (¾°).
  Opmerking. De berekende waarden zullen we in Opdracht 20 gebruiken.
- Uit krd(18°), zie Opdracht 6b, kan je met de formule de waarden van krd(9°) en krd(4½°) berekenen. Doe dat.
- Bereken ook krd(45°).
  Aanwijzing. Zie Opdracht 6b voor de waarde van krd(90°).
- Laat zien dat je nu alle koorden kunt uitrekenen die horen bij middelpuntshoeken tussen 0° en 180°, oplopend met stappen van 1½°. ♦

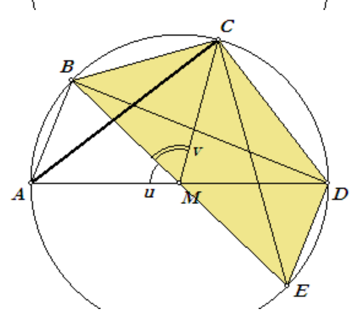
5. Een optelformule

Willen we eenzelfde koordentabel maken als Ptolemaeus deed (met middelpuntshoeken van 0° naar 180° met stappen van ½°), dan ontbreekt op dit moment nog *tweederde* van de middelpuntshoeken (ga dat na!).
Vooruitlopend op een methode om uit de *gegeven* waarde van krd(v) de waarde van krd(v + ½°) te kunnen berekenen, leidt Ptolemaeus eerst een *optelformule* af.

Opdracht 18



In de figuur hiernaast zijn krd(u) = krd(AB) en krd(v) = krd(BC) twee *gegeven* koorden van de cirkel met middellijn AD (we weten dus de lengte van beide koorden).
We moeten nu proberen uit deze beide gegevens de lengte van krd($u + v$) = krd(AC) af te leiden.



We vullen de figuur aan met de *middellijn BE* van de cirkel en met de lijnstukken BD, CD, CE, DE.

- Waarom is hier $AB = DE$?
- We weten de lengte van AB en we weten de lengte van BC. Waarom weten we nu *ook* de lengte van BD en de lengte van CE ?

Er geldt in de koordenvierhoek $BEDC$:

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

$$BE \cdot CD = BD \cdot CE - DE \cdot BC \qquad (10)$$

🗎 Waarom is dit zo?

🗎 Hoeveel onbekenden komen er voor in de uitdrukking die aangegeven is met (10)? Welke zijn (is) dat?

We kunnen uitdrukking (10) met behulp van de gebruikelijke notaties weergeven als:

$$\mathbf{krd(180°) \cdot krd(180° - (\mathit{u}+\mathit{v})) = krd(180° - \mathit{u}) \cdot krd(180° - \mathit{v}) - krd(\mathit{u}) \cdot krd(\mathit{v})} \qquad (11)$$

Hieruit kunnen we krd(180° – $(u+v)$) berekenen. En daarmee is dan ook krd($u+v$) bekend.

🗎 Geef een korte verklaring voor de juistheid van formule (11), kijkend naar uitdrukking (10).

🗎 Hoe kun je krd($u+v$) berekenen, als je weet hoe groot krd(180° – $(u+v)$) is? ♦

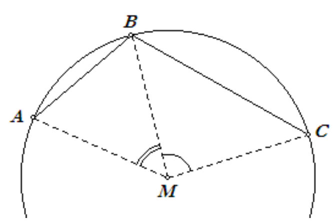
Opdracht 19

Gegeven is krd(u) = 23,92415 en krd(v) = 32,06861.

🗎 Bereken met formule (11) de lengte van krd($u + v$). Vermeld ook de gebruikte tussenstappen in je berekening.
Aanwijzing. Bereken eerst krd(180° – u) en krd(180° – v); zie daarvoor Opdracht 3.
Antwoord: krd($u + v$) = 54,47886. ♦

Als je nog eens terugkijkt op de door jou uitgevoerde berekeningen in Opdracht 19, dan krijg je misschien wel bewondering voor Ptolemaeus. Hij en zijn rekenende 'leerlingen' (want hij heeft zeker hulp gehad) moesten dat allemaal *zonder* rekenmachines doen! [4]

Ptolemaeus maakte zijn koordentabel verder af door eerst de waarde van krd(1°) te berekenen. Hij gebruikte (en bewees) daarvoor een door **Aristarchos** (ca. 310-230 v. Chr., Samos) gevonden eigenschap met betrekking tot de verhouding van koorden en bogen in een cirkel, de zogenoemde *ongelijkheid van Aristarchos*:



Voor de koorden CB en AB met $CB > AB$ geldt dat:

$$CB : AB < \text{bg}(CB) : \text{bg}(AB)$$

We zullen deze eigenschap hier niet bewijzen. Maar uit de ongelijkheid van Aristarchos volgt eenvoudig dat:

$$\text{krd}(1°) : \text{krd}(\tfrac{3}{4}°) < 1 : \tfrac{3}{4} \quad \text{zodat} \quad \text{krd}(1°) : \text{krd}(\tfrac{3}{4}°) < \tfrac{4}{3} : 1 \qquad (12a)$$

en:

$$\text{krd}(1\tfrac{1}{2}°) : \text{krd}(1°) < 1\tfrac{1}{2} : 1 \quad \text{zodat} \quad \text{krd}(1\tfrac{1}{2}°) : \text{krd}(1°) < 1 : \tfrac{2}{3} \qquad (12b)$$

Opdracht 20

🗎 Laat zien dat uit de relaties (12a) en (12b) volgt dat:

$$\tfrac{2}{3}\text{krd}(1\tfrac{1}{2}°) < \text{krd}(1°) < \tfrac{4}{3}\text{krd}(\tfrac{3}{4}°)$$

🗎 Bereken nu $\tfrac{2}{3}\text{krd}(1\tfrac{1}{2}°)$ en $\tfrac{4}{3}\text{krd}(\tfrac{3}{4}°)$.
Aanwijzing. Zie Opdracht 17.

🗎 Ptolemaeus leidde middels min of meer overeenkomstige berekeningen af, dat

$$\mathbf{krd(1°) = 1{,}04718}$$

Kom jij tot dezelfde conclusie? Verklaar je antwoord.

🗎 Hoe groot is krd(½°), als je de waarde van Ptolemaeus voor krd(1°) als uitgangspunt kiest? ♦

6. Slot

Je kunt nu - als je dat zou willen - de gehele koordentabel, lopend van 0° tot 180° graden (met stappen van ½°), verder afmaken. Maar maak in ieder geval nog de volgende drie opdrachten.

Opdracht 21

In Opdracht 19 is gegeven dat krd(v) = 32,06861. Hierbij is v = 31°.

🖹 Controleer deze waarde van krd(v) met behulp van formule (11). Vermeld daarbij ook de tussenstappen van je berekening. ♦

Opdracht 22

🖹 Bereken krd(2°) en krd(4°) met behulp van formule (11). ♦

Opdracht 23

Het getal $^{377}\!/_{120}$ wordt wel de *benadering van Ptolemaeus* voor π genoemd. Ptolemaeus gebruikte dat getal ook daadwerkelijk als hij de omtrek van een cirkel moest berekenen.

🖹 Onderzoek hoe Ptolemaeus mogelijk aan die waarde gekomen is.
Aanwijzing. Schrijf het decimale gedeelte van de benadering in het 60-tallig stelsel. ♦

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

7. Noten

[1] Ptolemaeus gebruikt bij het noteren van de lengte van een koorde voor het decimale gedeelte het 60-tallig stelsel (minuten en seconden). De eenheden en de 60-tallige waarden worden geschreven in het in die tijd in ieder geval in Griekenland gebruikelijke 'alfabetische stelsel'. Daarin worden aan de letters van het Griekse alfabet getalwaarden toegekend. Zie ook noot [4] en paragraaf 9, Appendix B.
Zo is (met ^{p} als aanduiding voor de eenheden):

$$\text{krd}(72°) = 70^p32'3'' = 70 + \tfrac{32}{60} + \tfrac{3}{3600}$$

De berekende waarde daarvan is in onze notatie 70,53417; de 'werkelijke' waarde heb je zelf in je tabel uitgerekend.

[2] Ptolemaeus gebruikt in zijn *Almagest* geen formules in de zin waarop ze hier genoteerd worden. Hij geeft een beschrijving van de manier waarop de berekening moet worden uitgevoerd.

[3] Het bewijs dat Ptolemaeus zelf geeft, is gebaseerd op gelijkvormige driehoeken.

[4] Je bewondering wordt misschien nog wel groter als je bedenkt dat het alfabetisch getalstelsel van de Grieken niet bepaald geschikt was om mee te rekenen. Het gebruik van de letters van het Griekse alfabet maakt dat nu eenmaal niet gemakkelijk.
Zo staat bij krd(72°) in Ptolemaeus' koordentabel (zie ook [1]):

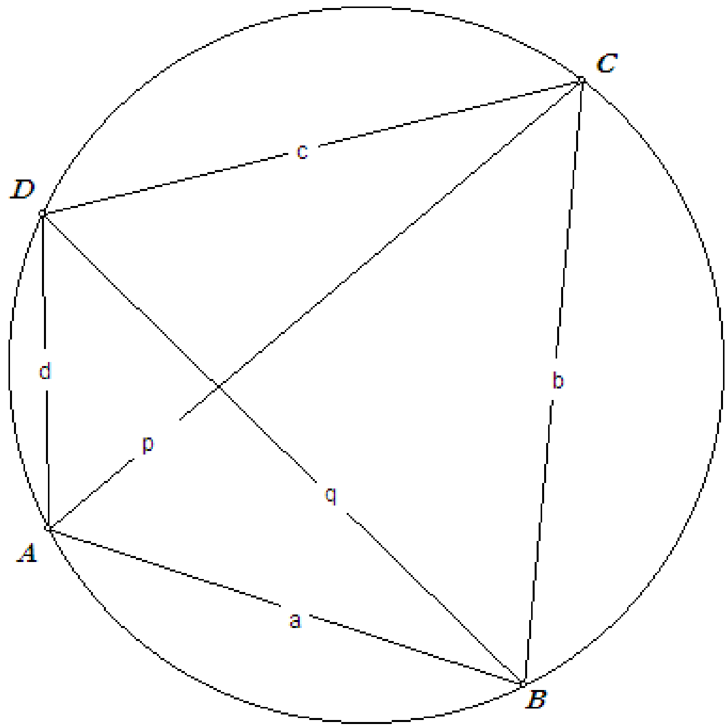
$$o\beta' \quad | \quad o \quad \lambda\beta \quad \gamma$$

De Griekse letters o, β, λ, γ hebben opvolgend de decimale waarden 70, 2, 30, 3. Zie verder paragraaf 9, Appendix B.

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

8. Appendix A

Onderstaande figuur behoort bij Opdracht 4.
De lengtes van de lijnstukken die in deze figuur staan (in millimeters), moeten bij de uitwerking van Opdracht 4 worden gebruikt.



Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

9. Appendix B

In het Griekse alfabetisch getalsysteem (ook wel *Ionisch getalsysteem* genoemd) worden aan de letters op de volgende manier getalwaarden toegekend:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	ϑ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\varepsilon$	,ϛ	$,\zeta$	$,\eta$	$,\vartheta$
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

De letters ϛ (stigma), ϟ (koppa) en ϡ (sampi) zijn als letter in het Griekse alfabet verdwenen, maar zijn blijven bestaan als aanduiding voor opvolgend de getallen 6, 90 en 900. Ook de letter ϝ (wau) werd soms voor de waarde 6 gebruikt.
Om de getallen van woorden te onderscheiden werd meestal een enkelvoudig aanhalingsteken ($'$) na het getal geplaatst (of een streep erboven). De som van de afzonderlijk letterwaarden bepaalde dan de totale 'woordwaarde'.
Voorbeeld. $\rho\kappa\gamma' = \overline{\rho\kappa\gamma} = 100 + 20 + 3 = 23$.
Voor de 1000-tallen werden dezelfde tekens gebruikt als voor de eenheden. Ter onderscheiding daarvan werd vóór de letter een komma (ook wel een iota-subscriptum: ͺ) of een laag geschreven (enkelvoudig) aanhalingsteken geplaatst.
Voorbeeld. $,\beta\varepsilon' = 2000 + 5 = 2005$.
De hoofdletter *M*, afkomstig uit een ouder Grieks getalsysteem (het *Herodiaanse* getalsysteem; naar de Romeinse schrijver **Aelius Herodianus**, ca. 180-250, die het heeft beschreven) werd gebruikt voor 10.000. Voor veelvouden van 10.000 werd boven de *M* een factor geschreven waarmee dan moest worden vermenigvuldigd.
Voorbeeld. $\overset{\lambda\eta}{M},\alpha\varphi o\delta' = 381\,574$.

Opdracht B1

🖹 Voer de vermenigvuldiging 31 × 123 uit en gebruik daarbij *alleen* 'Griekse' getallen.
Geef zo goed mogelijk aan wat je gedaan hebt. En, wat misschien nog belangrijker is, geef aan welke 'hulpmiddelen' je gebruikt hebt.
Aanwijzing. Zet de getallen onder elkaar en voer de vermenigvuldiging uit zoals je (wellicht) op de basisschool hebt geleerd.

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

10. Appendix C

De manier waarop in de Griekse oudheid de vierkantswortel uit een getal A werd getrokken, wijkt niet veel af van de manier waarop dat tegenwoordig gebruikelijk zou zijn (dus zonder rekenmachine).

Theon van Alexandrië (ca. 335-405, Egypte; hij was de vader van **Hypathia**, die vermoedelijk de eerste vrouw was die zich in de oudheid diepgaand met wiskunde heeft bezig gehouden) beschrijft deze methode in een commentaar op Ptolemaeus' *Almagest* (in de *Almagest* wordt niet beschreven *hoe* er gerekend werd). Het komt er daarbij in principe op neer dat er een benadering wordt gezocht van $\sqrt{A}$ door een getal $a + x$, zodat:

$$\sqrt{A} \le a + x \quad \Leftrightarrow \quad A - a^2 \le 2ax + x^2$$

Het getal a wordt gevonden als het grootste getal waarvoor a^2 juist kleiner is dan A, of waarvoor a^2 kleiner is dan (of gelijk is aan) de 10-tallen, 100-tallen, 1000-tallen, … van A.

Het getal x in de laatste uitdrukking wordt vervolgens, na deling van de 'rest' door $2a$, door proberen bepaald, en deze benadering wordt dan zo nodig herhaald.

Theon geeft in het bedoelde commentaar allereerst een eenvoudig voorbeeld, namelijk de bepaling van $\sqrt{144} = \sqrt{100+44}$. De eerste benadering daarvan wordt gevonden met $a = 10$, zodat voor de rest $A - a^2$, na kwadrateren, geldt:

$$44 = 2 \cdot 10 \cdot x + x^2 = (20 + x)x$$

Deling van 20 op 44 geeft dan $x = 2$, en omdat $(20 + 2) \cdot 2 = 44$, vinden we $\sqrt{144} = 10 + 2 = 12$.

Als voorbeeld van een berekening met *60-tallige* 'decimalen' licht Theon de berekening van Ptolemaeus van $\sqrt{4500} = 67 + x/60 + y/60^2$ toe.

Voor de rest $A - a^2$ (met $A = 4500$ en $a = 67$) geldt dan, bij benadering:

$$11 = 2 \cdot 67 \cdot x/60 + x^2/60^2$$

waarna hij x, onder verwaarlozing van de term $x^2/60^2$, bepaalt uit:

$$x \le \tfrac{11 \cdot 60}{2 \cdot 67} = \tfrac{330}{67} \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Omdat $(67 + 4/60)^2 < 4500$ is, kan ook y worden bepaald. De nieuwe rest is nu:

$$11 - \tfrac{2 \cdot 67 \cdot 4}{60} - \tfrac{4}{60^2} = \tfrac{11 \cdot 60^2 - 2 \cdot 67 \cdot 4 \cdot 60}{60^2} = \tfrac{7424}{60^2}$$

En dan moet $2 \cdot (67 + \tfrac{4}{60}) \cdot \tfrac{y}{60^2}$ een benadering zijn van $\tfrac{7424}{60^2}$, zodat:

$$8048y \le 7424 \cdot 60$$

Met andere woorden: $y = 55$

En Theon vindt daarmee: $\sqrt{4500} = 67^p 4'55'' \quad (\approx 67{,}08194)$

('Onze' waarde in 5 decimalen is: 67,08203.)

Deze methode heeft evenwel niet altijd succes. Als namelijk bij de gevonden waarde van a en de nog te bepalen waarde van x de grootte van $x^2/60^2$ *niet* verwaarloosbaar is, dan is het vinden van x niet eenvoudig.

Bekijken we, als voorbeeld, $\sqrt{3} = 1 + x/60 + y/60^2$. Dan geldt volgens de methode van Theon voor de benaderde rest, na kwadrateren:

$$2 = 2 \cdot 1 \cdot x/60 + x^2/60^2$$

En dan is, en ook nu verwaarlozen we $x^2/60^2$:

$$x \le \tfrac{2 \cdot 60}{2 \cdot 1} = 60$$

En daaruit is het inderdaad moeilijk de juiste waarde van x te vinden…

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel

In zo'n geval ging men iets anders te werk. Men vermenigvuldigde dan eerst het getal A met 60^2. Hier geeft dat:

$$\sqrt{3\cdot 60^2} = \sqrt{10800} = \sqrt{10609+191} = 103+\cdots$$

waarbij: $\quad {}^{103}\!/_{60} = 1 + {}^{43}\!/_{60}$

om daarna weer de gebruikelijke methode toe te passen op $\sqrt{3} = 1 + {}^{43}\!/_{60} + {}^{y}\!/_{60^2}$; en dan is:

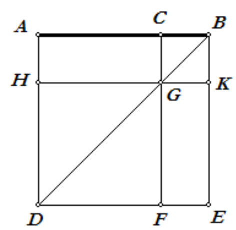
$$\sqrt{3} = 1^p 43'55''$$

Opdracht C1

🖹 Bereken $\sqrt{132}$ volgens de methode van Theon. Geef ook de daarbij gebruikte tussenberekeningen.

Overigens, de klassieke worteltrekking is gebaseerd op een stelling uit de *Elementen* van **Euclides** (ca. 325-265 v. Chr., Egypte), namelijk propositie 4 uit boek II (handelend over de oppervlakterekening):

Als een lijnstuk willekeurig is verdeeld, dan is het vierkant op het geheel gelijk aan de vierkanten op de delen vermeerderd met het dubbele van de rechthoek bepaald door die delen.



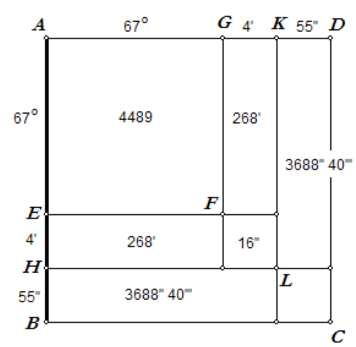
Toelichting. Het lijnstuk AB wordt door het punt C verdeeld in twee stukken, AC en BC.
Dan is (volgens Prop. II, 4):

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 + 2\cdot AC\cdot BC$$

Of, met gebruik van de oppervlaktefunctie $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(ABED) = \mathcal{F}(HGFD) + \mathcal{F}(CBKG) + 2\cdot \mathcal{F}(ACGH)$$ ♦

Theon geeft in zijn commentaar op de berekening van $\sqrt{4500}$ ook de volgende figuur:



Opdracht C2

🖹 Probeer eens uit te vinden hoe Theon de getallen in bovenstaande figuur heeft gevonden. Geef een kort verslag van de manier waarop je dat hebt gedaan.

Je ziet dat er in de figuur ook 60-e delen van een seconde ($'''$)zijn gebruikt.

🖹 Hoe groot is de waarde van $\sqrt{4500}$ als je ook $'''$ (${}^{1}\!/_{60}$ sec) gebruikt?
Licht je berekening toe. ♦

 Copyright © 2007 Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel