Cabri-werkblad
Projectieve meetkunde: enkele eerste stappen

1. Inleiding

In de vlakke meetkunde (en dus ook in Cabri) wordt veelvuldig gebruik gemaakt van zogenoemde *afbeeldingen*. Dat zijn in het algemeen voorschriften waarmee uit een bepaalde figuur een andere figuur ontstaat.
Bekende Cabri-afbeeldingen zijn: puntspiegeling, lijnspiegeling, rotatie, vermenigvuldiging en translatie. Ook de functie inversie is zo'n afbeelding.
Een eigenschap van de meeste afbeeldingen (niet van inversie en ook niet van vermenigvuldiging) is dat lengtes van lijnstukken (onderlinge afstand van punten) bij die afbeelding niet veranderen (*invariant* zijn).
Ook begrippen als 'liggen op' (van punten) en 'gaan door' (van lijnen) veranderen meestal niet bij *origineel* (de oorspronkelijke figuur) en *beeld* (de figuur die ontstaat als gevolg van de afbeelding).

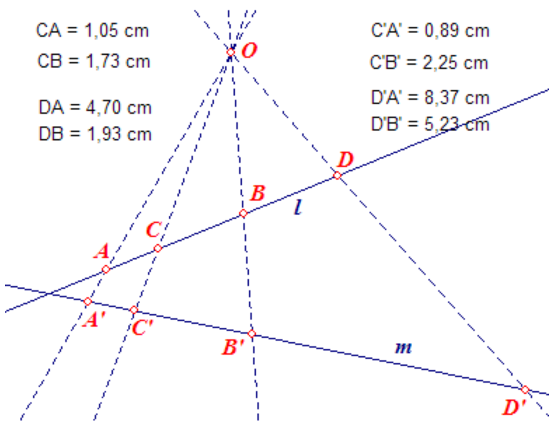
In hetgeen volgt introduceren we een afbeelding waarbij niet de lengte van een lijnstuk, maar wel een (bijzondere) *verhouding* tussen de lengtes van meerdere lijnstukken die gelegen zijn op dezelfde lijn, invariant is.
Daarop voortbouwend zullen we enkele eigenschappen van dat type afbeelding de revue laten passeren.

We gaan er in dit werkblad van uit dat begrippen als *gelijkvormigheid*, *evenredigheden in een driehoek* bij de leerling bekend zijn; en voorts dat de leerling bekend is met het gebruik van de meeste Cabri-functies, waaronder zeker Cabri's 'Rekenmachine'.

N.b. In de opdrachten staat soms het teken 🗎. De bedoeling daarvan is dat de uitwerking van zo'n onderdeel *in ieder geval* opgenomen wordt in je verslag (of op een antwoordblad).
Het einde van elke opdracht wordt aangegeven met het teken «.

Opdracht 1

figuur 1



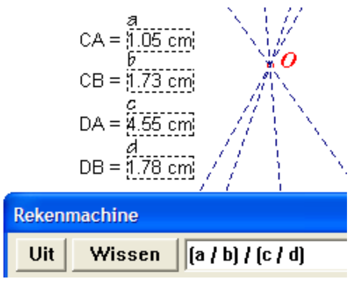
- Teken een lijn l (zie figuur 1). Kies op de lijn l de punten A, B, C, D (willekeurig).
- Bereken met de functie 'Afstand' (in het *Reken*-menu, het derde menu van rechts) de lengtes van de lijnstukken CA, CB, DA, DB (je hoeft die lijnstukken natuurlijk niet te tekenen).
- Teken vervolgens ook een lijn m en een punt O en bepaal de snijpunten A', B', C', D' van de lijnen OA, OB, OC, OD met de lijn m.
- Bereken nu ook de lengtes van de lijnstukken $C'A'$, $C'B'$, $D'A'$, $D'B'$.«

Voorlopig is er nog niets van invariantie te zien. Overduidelijk is in ieder geval wel dat de lengtes van de beeldlijnstukken die je hierboven berekend hebt, *niet gelijk* zijn aan die van de oorspronkelijke lijnstukken ($C'A' \neq CA$, $C'B' \neq CB$, …).
Overigens, we spreken hier van **projecteren** van de punten van de lijn l op punten van de lijn m met het punt O als **projectiecentrum** (of kortweg ook wel *centrum*). De afbeelding die de lijn l op de

lijn m afbeeldt, heet daarom **centrale projectie** of ook wel een **perspectiviteit** of **perspectieve afbeelding** van de lijn l op de lijn m.
Men zegt wel dat de perspectiviteit bestaat uit de puntenparen (A, A'), (B, B'), …
Merk verder op, dat het bij een perspectiviteit heel eenvoudig is van elk punt X van l het beeldpunt X' op m te construeren.

Opdracht 2

figuur 2



- Voer nu, gebruik makend van de waarden die je in Opdracht 1 gevonden hebt, de volgende *dubbele deling* uit:
  $(CA/CB)/(DA/DB)$
  Natuurlijk doe je dat met Cabri's Rekenmachine (zie figuur 2; en denk om de noodzakelijke haakjes om de breuk **c / d**!).
- Bereken dan ook: $(C'A'/C'B')/(D'A'/D'B')$.

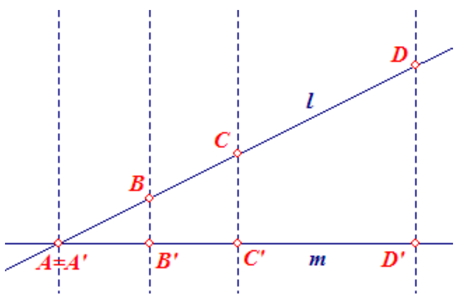
🖹 Wat valt je nu op?«

Opdracht 3a

Als het goed is, heb je in Opdracht 2 gezien dat beide dubbele delingen dezelfde uitkomst geven.

- Als dat niet het geval was, kijk dan eens of je de juiste lijnstukken bij het berekenen van de lengtes hebt gebruikt, en zonodig ook of de delingen correct zijn uitgevoerd. Gebruik bij dit laatste eventueel een 'gewone' rekenmachine.
- Ga vervolgens na dat door verplaatsing van de punten A, B, C, D, O de dubbele delingen steeds dezelfde uitkomst geven.«

figuur 3



Opmerking. Bijzondere gevallen van een perspectiviteit komen we tegen als een punt met diens beeldpunt samenvalt, en als de *projecterende lijnen* AA', BB', … evenwijdig zijn, bijvoorbeeld bij de zogenoemde *loodrechte projectie*.
Zie daarvoor figuur 3 waarin we beide bijzondere gevallen in dezelfde tekening hebben weergegeven.

Opdracht 3b

🖹 Verklaar nu, zonder de lengtes van de betreffende lijnstukken te berekenen, dat de dubbele delingen $(CA/CB)/(DA/DB)$ en $(C'A'/C'B')/(D'A'/D'B')$ bij een loodrechte projectie als in figuur 3 aan elkaar gelijk zijn.

🖹 Wat moet er worden veranderd in je bewijs als de lijnen BB', CC', DD' wel evenwijdig zijn, maar *niet* loodrecht staan op de lijn m?«

2. Deel- en dubbelverhouding

Voordat we een definitieve betekenis zullen geven aan de dubbele deling, maken we eerst de volgende afspraak.

Afspraak. Ligt een punt C **op** een lijnstuk AB – dus tussen de punten A en B – dan noemen we het getal $-\dfrac{CA}{CB}$ de **deelverhouding** van C op dat lijnstuk (let op het minteken!).
Ligt het punt C *niet* tussen A en B – dus op het verlengde van AB of op het verlengde van AB – dan is $\dfrac{CA}{CB}$ (een positief getal dus) de **deelverhouding** van C op AB.

We gebruiken in beide gevallen voor de deelverhouding de notatie $(ABC) = \pm\dfrac{CA}{CB}$, waarbij we bij de berekening van (ABC) moeten kiezen voor het minteken indien het punt C ***op*** *het lijnstuk* AB ligt.

Opdracht 4

- Waarom is $(ABC) \neq (BAC)$?
- Voor welke positie(s) van het punt C op de lijn AB is (ABC) *wel* gelijk aan (BAC)?
- Voor welke positie(s) van het punt C op de lijn AB is $(ABC) = 0$?«

N.b. Als het punt C met het punt B samenvalt, dan is $(ABC) = (ABB) = \dfrac{BA}{BB}$. Omdat $BB = 0$ is, zeggen we dat (ABC) in dit geval *onbepaald* is.

Afspraak. We definiëren nu de zogenoemde **dubbelverhouding** $(ABCD)$ van vier punten A, B, C, D op een lijn als:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$$

Let wel, bij deze definitie wordt gebruik gemaakt van deelverhoudingen. En zo'n deelverhouding kan in bepaalde gevallen negatief zijn. Met als gevolg dat de dubbelverhouding van vier punten ook negatief kan zijn (zie daarvoor Opdracht 5)!

Opdracht 5

- Bij welke posities van de punten C, D ten opzichte van de (vaste) posities van de punten A, B op een lijn l is $(ABCD) < 0$?

Er zijn 24 mogelijkheden om – bij gegeven posities van A, B, C, D op een lijn l – een dubbelverhouding op te schrijven (ga dat zelf na!).

- Als je weet dat $(ABCD) = d$, laat dan zien, dat:

$$(BADC) = d \qquad (ACBD) = 1-d \qquad (ADCB) = \frac{d}{d-1}$$

$$(ABDC) = \frac{1}{d} \qquad (ACDB) = \frac{1}{1-d} \qquad (ADBC) = \frac{d-1}{d}$$

- Welke twee andere van de 24 bedoelde dubbelverhoudingen zijn ook gelijk aan $(ABCD)$?

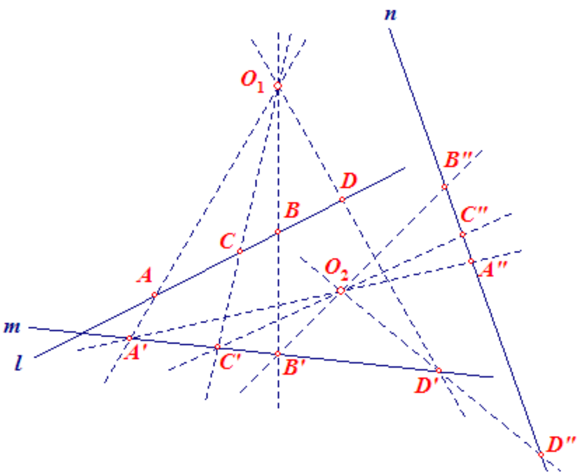
Op een lijn l liggen de punten A, B, C, D, E waarbij je weet dat $(ABCD) = d$ en $(ABCE) = e$.
- Bereken nu $(ABDE)$, of anders gezegd: druk $(ABDE)$ uit in d en e.«

We keren nu even terug naar Opdracht 3a. Daaruit kunnen we, op basis van wat we vonden in Opdracht 2, concluderen:

Stelling 1
De dubbelverhouding van vier punten op een rechte lijn is invariant bij centrale projectie van die lijn op een andere rechte lijn.

Opdracht 6

figuur 4



In figuur 4 liggen de punten A, …, D op de lijn l.
Door centrale projectie met centrum O_1 van de lijn l op de lijn m zijn de punten A', …, D' verkregen.
Door centrale projectie van m op n met centrum O_2 krijgen we de punten A'', …, D''.

- 🖹 Bewijs dat $(ABCD) = (A''B''C''D'')$.
- Maak met behulp van Cabri eenzelfde figuur als figuur 4.

🖹 Is er nu een punt O_3, waardoor via centrale projectie met O_3 als centrum de lijn l (direct) op de lijn n kan worden afgebeeld?
Licht je antwoord toe door een afdruk van je tekening bij het verslag te voegen.«

3. Projectieve afbeeldingen

We definiëren nu, op grond van wat we in Opdracht 6 hebben bewezen:

Afspraak. Een **projectieve afbeelding** of **projectiviteit** van de punten van een lijn op de punten van een andere lijn is een afbeelding waarbij de dubbelverhouding van elk viertal punten, die gelegen zijn op de eerste lijn, invariant is.

Zoals we in Opdracht 6 ook gezien hebben, kunnen we een projectieve afbeelding maken door twee centrale projecties na elkaar uit te voeren.

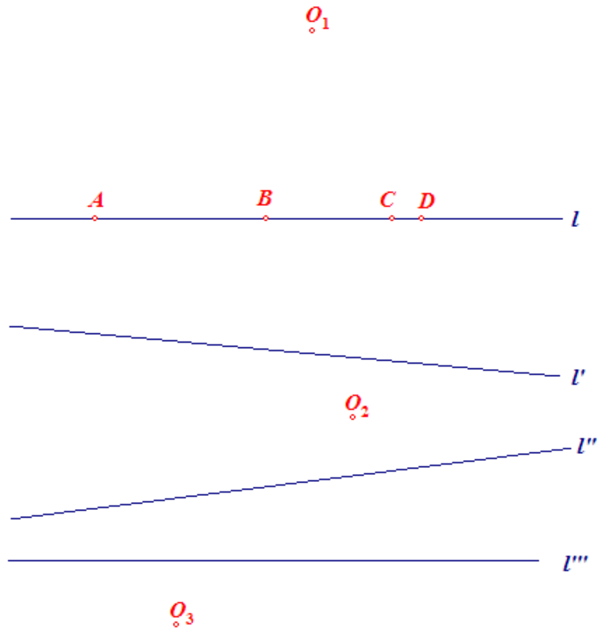
De vraag die we nu stellen is: hoeveel puntenparen (dat zijn punt en beeldpunt samengenomen) hebben we nodig om een projectieve afbeelding vast te leggen?
Met 'vastleggen' bedoelen we, dat we dan op *ondubbelzinnige wijze* van een extra gegeven punt het beeldpunt kunnen construeren.
Lukt het met één puntenpaar? Met twee? Hebben we drie paren nodig? Of zelfs vier?
We zullen proberen het juiste antwoord te vinden op de vraag naar het aantal puntenparen dat een projectieve afbeelding vastlegt.

Opdracht 7

🖹 Laat zien dat een centrale projectie (een perspectiviteit van een lijn l op een lijn m) kan worden vastgelegd door het geven van twee punten en hun beeldpunten.
Voeg een afdruk van de bijbehorende tekening bij je verslag, waarmee ook duidelijk moet worden hoe je van een willekeurig derde punt het beeldpunt hebt geconstrueerd.«

Opdracht 8

figuur 5



In figuur 5 zijn de lijnen l, l', l'', l''' willekeurige lijnen.

N.b. Het is niet noodzakelijk dat de lijnen l en l''' evenwijdig zijn.

Op de lijn l liggen ten minste vier punten: A, B, C, D.

- Maak met Cabri zelf een tekening die overeenkomt met de tekening in figuur 5.
- Projecteer dan de punten A, B, C, D vanuit een punt O_1 op de lijn l'. Dit geeft op l' de punten A', B', …
  Projecteer vervolgens deze punten weer op de lijn l'' om de punten A'', B'', … te krijgen.
  En projecteer tenslotte deze punten weer op de lijn l''' zodat je A''', B''', … krijgt.

(Je zou zo best nog even door kunnen gaan…)

- Verberg daarna alle objecten met uitzondering van de lijnen l en l''' , de punten A, B, C, D en A''', B''', C''', D'''.

🖹 Waarom is hier $(ABCD) = (A''', B''', C''', D''')$?«

Opdracht 9

We gaan in deze opdracht verder met de figuur die in Opdracht 8 is ontstaan.
Er bestaat een projectieve afbeelding van de lijn l op de lijn l''' met de puntenparen (A, A'''), (B, B'''), (C', C'''), (D, D''').
Zoals je in Opdracht 6 al gezien hebt, kan je zo'n projectiviteit opbouwen met twee perspectiviteiten, de eerste met centrum P, de tweede met centrum Q. Je hebt daarbij natuurlijk ook een hulplijn m nodig (zie weer Opdracht 6).

- Probeer zo'n projectieve afbeelding te vinden.
  Kies daartoe een punt P als perspectiviteitscentrum op de lijn AA''' en projecteer dan de punten B, C, D op een lijn m die door A''' gaat; de beeldpunten van B, C, D bij die afbeelding zijn E, F, G.
- Kies daarna het tweede centrum Q zó, dat je de punten E, F weer (handig) centraal kan projecteren van m op de juiste punten van de lijn l'''.
- Teken ook de lijn door Q en G.

🖹 De lijn QG moet (als het allemaal goed gegaan is) door het punt D''' gaan. Bewijs dat!
Aanwijzing – Gebruik bij het bewijs enkele dubbelverhoudingen.

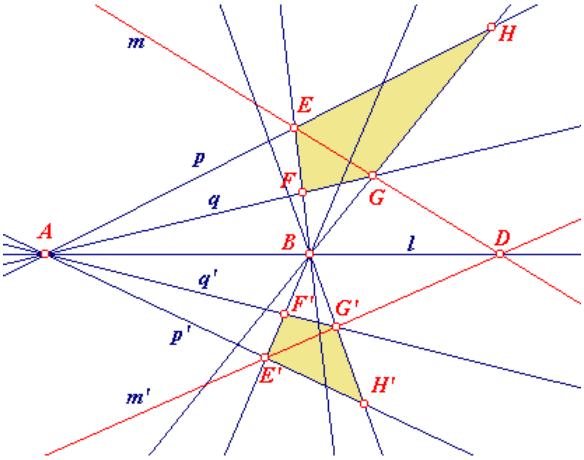
🖹 Voeg een tekening waarin je al het bovenstaande hebt uitgevoerd, toe aan je verslag.«

4. Tussenspel

Een bijzondere dubbelverhouding van vier op dezelfde lijn liggende punten A, B, C, D is die waarbij $(ABCD) = -1$.
We zullen in Opdracht 10 en Opdracht 11 de bijzondere ligging van die punten bekijken.

Opdracht 10

figuur 6



De figuur hiernaast (zie figuur 6) is volgens onderstaande stappen getekend.
Volg deze stappen op de voet en maak met Cabri ongeveer dezelfde tekening.

- Teken een lijn l met daarop de punten A, B, D.
- Teken door het punt A de willekeurige lijnen p en q en door het punt D de willekeurige lijn m.
- Bepaal het snijpunt E van m met p en het snijpunt G van m met q.
- Teken dan de lijnen BE en BG. BE snijdt de lijn q in het punt F en BG snijdt p in H.
- Doe daarna min of meer hetzelfde, maar dan *onder* de lijn l met de lijnen p', q', m', de punten E', G' en de lijnen BE', CG' die op hun beurt de snijpunten F' en H' geven.
- Hierna kan je, indien gewenst, de lijnen p, q, BF, BG en de lijnen p', q', BF', BG' verbergen om de tekening wat duidelijker te maken.

In de figuur hebben we nu twee vierhoeken $EFGH$ en $E'F'G'H'$ gekregen waarvan telkens slechts één diagonaal, opvolgend $EG = m$ en $E'G' = m'$, getekend is.

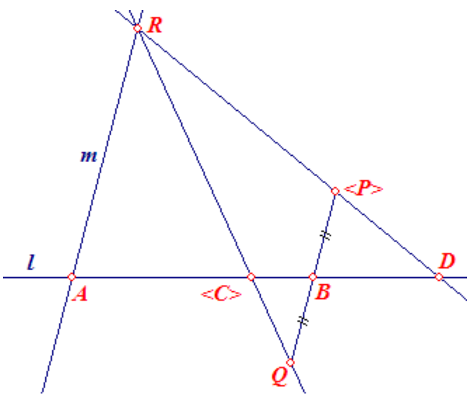
- Teken nu van vierhoek $EFGH$ de tweede diagonaal FH.
  De lijn FH snijdt de lijn l in het punt C.
- Teken dan de tweede diagonaal $F'H'$ van vierhoek $E'F'G'H'$.
- 🗎 De lijn $F'H'$ snijdt de lijn l (ook) in … (vul in). Is dat toeval?
  Door enkele onafhankelijke Cabri-objecten (bijvoorbeeld het punt B, de lijn p, de lijn q) te verplaatsen kan je ook antwoord geven op de vraag of dat inderdaad toeval is.

- Bereken met de Cabri's rekenmachine de waarde van $(ABCD)$. Zet daarbij de lengtes van de lijnstukken CA, CB, DA, DB en de waarde van $(ABCD)$ ook op het tekenblad.

- 🗎 Geef indien mogelijk een verklaring – een bewijs mag natuurlijk ook, of een poging daartoe – voor het feit dat de lijnen l en $F'H'$ elkaar ook in het punt C snijden.
- 🗎 Voeg in ieder geval een afdruk van je tekening aan je verslag toe.«

Opdracht 11

figuur 7



Bij de constructie in figuur 7 is uitgegaan van de punten A, B, C op de lijn l, waarbij C tussen de punten A en B ligt.
Het punt P is een willekeurig punt (niet te ver van het punt B af). Het punt Q is het spiegelbeeld van P in het punt B.
De lijn m is de lijn door A die evenwijdig is met het lijnstuk PQ.
De lijn QC snijdt de lijn m in het punt R en de lijn RP snijdt de lijn l in het punt D.

- Ga na dat de ligging van het punt D op l niet verandert als je het punt P verplaatst (maak dus eerst zelf een tekening!).
- 🖹 Welke positie moet je aan het punt C geven om ervoor te zorgen, dat de lijn RP evenwijdig is met de lijn l? Hoe groot is in dit geval de waarde van $(ABCD)$?

Stel nu $BP = p$ en $AR = r$.

- 🖹 Waarom zijn de driehoeken CAR en CBQ gelijkvormige driehoeken?
- 🖹 Vul aan:
  $CA : CB = \ldots : \ldots = \ldots : \ldots$ (*Aanwijzing* – Schrijf hier iets met p en r.)
- 🖹 Waarom zijn de driehoeken DAR en DBP gelijkvormig?
- 🖹 Vul aan:
  $DA : DB = \ldots : \ldots = \ldots : \ldots$ (*Aanwijzing* – Schrijf ook hier iets met p en r.)
- 🖹 Bereken vervolgens: $(ABCD) = \dfrac{(ABC)}{(ABD)}$.«

5. De hoofdstelling van de projectieve meetkunde

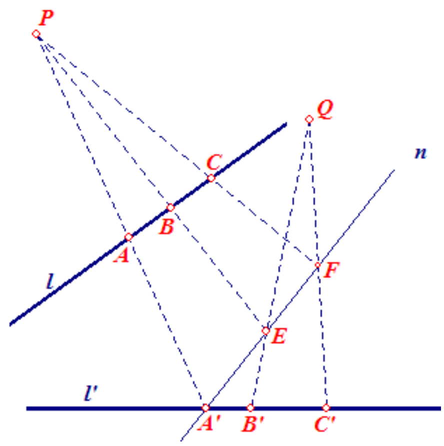
Het deel van de meetkunde dat uitsluitend gaat over de bestudering van projectieve eigenschappen van figuren wordt *projectieve meetkunde* genoemd. Projectieve eigenschappen zijn eigenschappen die niet veranderen als we een figuur onderwerpen aan een projectieve afbeelding (dus aan een perspectiviteit of aan een projectiviteit). Een dergelijke projectieve eigenschap is, zoals we gezien hebben, de dubbelverhouding van vier punten op een rechte lijn.

De belangrijkste stelling (de zogenoemde hoofdstelling) uit de projectieve meetkunde luidt:

Stelling 2
Een projectiviteit tussen de punten op twee verschillende lijnen is bepaald door drie paren van corresponderende punten.

Met het vermelden van deze stelling hebben we in ieder geval een antwoord gegeven op de vraag die we aan het begin van paragraaf 3 stelden: hoeveel puntenparen hebben we nodig om een projectieve afbeelding vast te leggen?
Het komt dus op het volgende neer: als A, B, C punten zijn op een lijn l en als A', B', C' punten zijn op een lijn l', dan *bestaat* er *precies één* projectiviteit die A op A', B op B' en C op C' afbeeldt.
Hiermee worden eigenlijk twee dingen tot uiting gebracht: het *bestaan* van een dergelijke afbeelding én het *unieke* karakter (precies één) daarvan.
Het bewijs van Stelling 2 valt dus uiteen in twee delen.

figuur 8



Deel 1. Het bewijs voor het *bestaan* van een projectiviteit met de puntenparen (A, A'), (B, B') (C, C') ligt eigenlijk opgesloten in Opdracht 9.
We kunnen met twee perspectiviteiten (gebruik makend van een derde lijn, een afbeelding samenstellen die A op A', B op B' en C op C' afbeeldt (zie figuur 8).
En in Opdracht 6 hebben we gezien dat we dan via een vierde puntenpaar (D, D') komen tot:

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

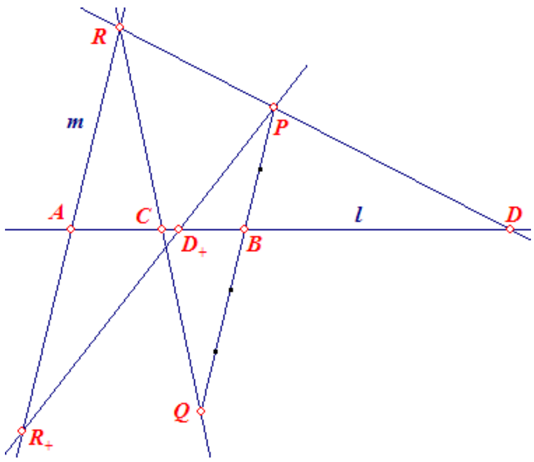
en de samenstelling van die twee perspectiviteiten is dan per definitie een projectiviteit.

Deel 2. Het *uniek* zijn van die projectiviteit moeten we echter nog bewijzen. En dat doen we (zij het niet volledig) in Opdracht 12a en b en Opdracht 13.

Opdracht 12a

Allereerst bekijken we een constructie. Op een lijn l liggen de vaste punten A, B, C; zie figuur 9.

figuur 9

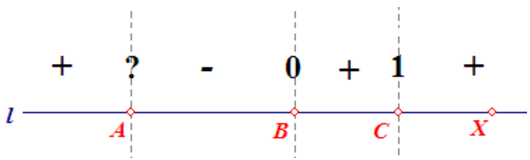


Gevraagd wordt op de lijn l een (het?) punt D zó te construeren dat $(ABCD) = -\tfrac{2}{3}$.
In de figuur is eenzelfde constructie gegeven als in Opdracht 11.
Bekijk nu eerst de ligging van de punten P, Q en R, waarmee het punt D geconstrueerd is. Construeer de figuur eventueel ook zelf!
🖹 Bewijs dat nu inderdaad $(ABCD) = -\tfrac{2}{3}$.
Het punt R_+ is het spiegelbeeld van het punt R in het punt A.
Het punt D_+ is het snijpunt van R_+P met de lijn l.
🖹 Toon aan dat $(ABCD_+) = \tfrac{2}{3}$.«

Uit deze constructie zou je kunnen concluderen, dat er inderdaad precies één punt D is dat bij gegeven A, B, C op de lijn l een dubbelverhouding oplevert van $-\tfrac{2}{3}$. Maar is de constructie wel uniek? Met andere woorden: zouden we bij een andere methode van construeren niet een *tweede* punt D kunnen vinden waarvoor ook $(ABCD) = -\tfrac{2}{3}$?
We zullen echter *aannemelijk* maken dat er inderdaad maar één punt D bestaat bij een gegeven waarde van $(ABCD)$.

Opdracht 12b

figuur 10

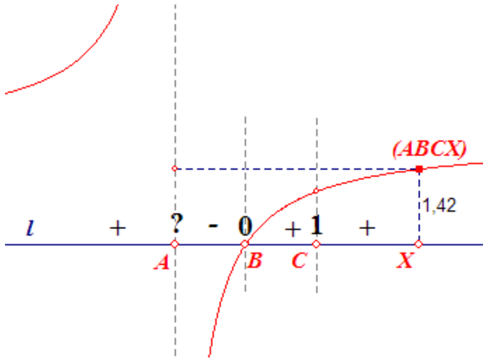


In Opdracht 5 hebben we al gekeken naar het teken van $(ABCD)$ bij verschillende posities van de punten C en D ten opzichte van A en B.
We doen dat in figuur 10 nu ook voor $(ABCX)$.
De punten A, B, C zijn daarbij *vaste* punten op de lijn l en het punt X laten we 'lopen' over de lijn l.

We zien dat het punt X in vier gebieden kan liggen: links van A, tussen A en B, tussen B en C en ook rechts van C. De 'waarde' van $(ABCX)$ staat erboven. Uiteraard kan X ook samenvallen met A, B of C.
🖹 Geef een verklaring voor de in figuur 10 staande waarden.
🖹 Maak zelf een figuur als figuur 10, maar kies dan het punt C tussen A en B.«

Opdracht 13

figuur 11



In figuur 11 hebben we ook de berekende waarde van (*ABCX*) opgenomen.
Ook is getekend de grafiek van de functie $y = (ABCX)$ voor de verschillende posities van het punt *X* op de lijn *l*.
Verder is het punt *B* nu het midden van het lijnstuk *AC*.
De grafiek van (*ABCX*) is een **hyperbool**.

- Verklaar de verticale asymptoot van de hyperbool bij het punt *A*.

- Waarom is in dit geval $\lim_{X\to-\infty}(ABCX) = \lim_{X\to\infty}(ABCX) = 2$?

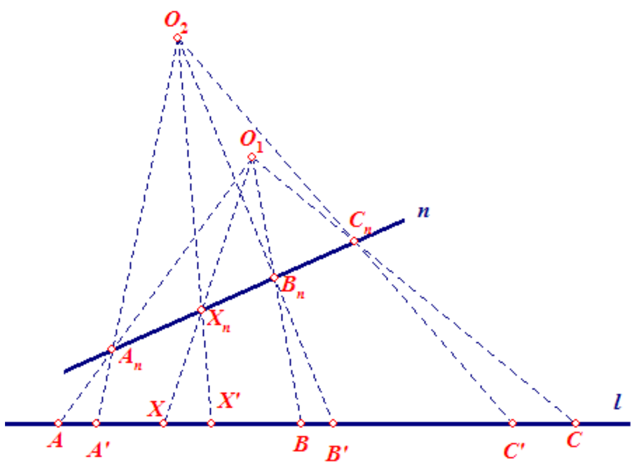
  N.b. Met '$X\to-\infty$' en '$X\to\infty$' bedoelen we hier dat het punt *X* op de lijn *l* een positie inneemt op 'oneindig' grote afstand links en rechts van het punt *A*.
- Uit de grafiek van $y = (ABCX)$ blijkt nu dat er bij gegeven *A*, *B*, *C* op de lijn *l* én een gegeven waarde *d* van (*ABCD*) er precies één punt *D* op *l* bestaat waarvoor $(ABCD) = d$.
  Waarom blijkt dat uit de grafiek?
- En is het eigenlijk wel zo, dat dat voor *elke* waarde van *d* geldt? Verklaar je antwoord kort.
- (**niet eenvoudig; facultatief**) Bewijs dat de grafiek van $y = (ABCX)$ een hyperbool is.

- Maak een schets van de grafiek van de functie $y = (ABCX)$ waarbij het punt *C* het midden is van het lijnstuk *AB*.
  Teken in die schets ook de beide asymptoten van de hyperbool.
- Bij welke waarde van *d* is er in dit geval *geen* punt *D* waarvoor geldt dat $(ABCD) = d$?«

6. Afbeelding van een lijn op zichzelf, dubbelpunten, p-reeks

We kunnen met twee perspectiviteiten ervoor zorgen dat punten en beeldpunten op *dezelfde* lijn liggen. Men spreekt dan van een *projectieve afbeelding* van de lijn *op zichzelf* (zie figuur 12).

figuur 12



In de figuur hiernaast beeldt de centrale projectie met centrum O_1 de punten *A*, *B*, … van de lijn *l* af op de lijn *n*; dit geeft op de lijn *n* de punten A_n, B_n, …
De centrale projectie met centrum O_2 beeldt dan die punten weer op *l* zelf af; dit geeft de punten *A'*, *B'*, …
De puntenparen (*A*, *A'*), (*B*, *B'*), … op de lijn *l* vormen daardoor een projectieve afbeelding van *l* op zichzelf.

De projectieve afbeelding is vastgelegd door de paren (*A*, *A'*), (*B*, *B'*), (*C*, *C'*). Van een willekeurig punt *X* is op deze manier eveneens het beeldpunt *X'* geconstrueerd.

Opdracht 14

- Teken met Cabri op een nieuw tekenblad eenzelfde figuur als in figuur 12.

Er zijn in dit geval twee posities van het punt *X* waarvoor geldt $X = X'$.

- Ga dat na met behulp van de door jou gemaakte figuur.

Afspraak. Punten die bij een projectieve afbeelding op zichzelf worden afgebeeld, heten **dubbelpunten** van die projectieve afbeelding.

Deze dubbelpunten laten zich in de figuur – ook *zonder* het punt X te verplaatsen – construeren.

🗎 Voer deze constructie eveneens uit en voeg een afdruk van de tekening toe aan je verslag.

🗎 Geef een korte verklaring waarom de dubbelpunten juist op die posities op de lijn l te vinden zijn.«

We kunnen ook het omgekeerde doen: we kiezen op een lijn l twee verschillende punten X en Y waarvan we weten dat het de dubbelpunten zijn van een projectieve afbeelding van de lijn l op zichzelf.

Opdracht 15

🗎 Toon door middel van een (zo mogelijk eenvoudige) tekening aan, dat er nu *meerdere* projectieve afbeeldingen mogelijk zijn die X en Y als dubbelpunten hebben.«

Opdracht 16

Op een lijn l zijn gegeven de (verschillende) punten X, Y, A en A'. Het paar (A, A') is een puntenpaar van een projectieve afbeelding van de lijn l op zichzelf. De punten X en Y zijn de dubbelpunten van die projectieve afbeelding.

🗎 Laat door middel van een tekening zien, dat het nu mogelijk is van een willekeurig punt Z (dat ook op l ligt) bij bedoelde projectieve afbeelding het beeldpunt Z' op l te construeren.«

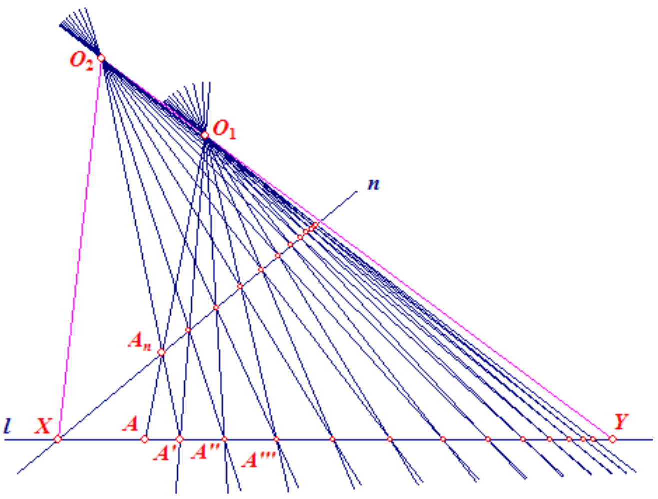
We stellen nu op basis van Opdracht 16:

Stelling 3

Een projectieve afbeelding van een lijn op zichzelf is bepaald door één puntenpaar en de beide dubbelpunten.

Maar we kunnen verder gaan met afbeelden. Immers, ook het punt A' (het is een punt van de lijn l) kan weer onderworpen worden aan dezelfde projectieve afbeelding. En dat levert dan weer een nieuw punt A'' (het beeld van A') op l op. En ook A'' heeft weer een beeld A''' op l, enzovoorts; zie figuur 13.

figuur 13



Opdracht 17

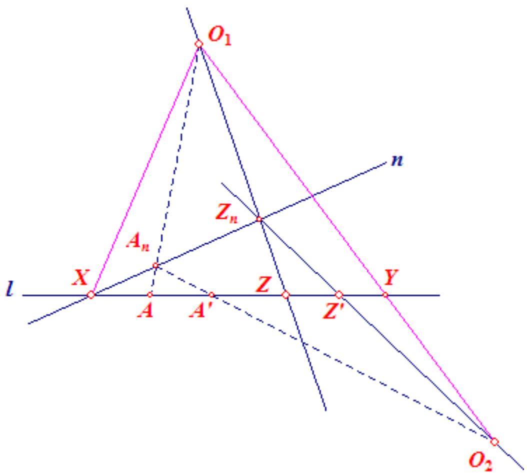
In figuur 13 is een projectieve afbeelding van de lijn l op zichzelf vastgelegd door de dubbelpunten X en Y en het puntenpaar (A, A').

- Als je de rij punten $A, A', A'', A''', \ldots, A^{(k)}$ bekijkt, is het dan mogelijk, dat een punt uit die rij rechts van het punt Y komt te liggen? Verklaar je antwoord kort.«

Enkele afspraken. Een rij punten zoals de punten A in figuur 13 noemen we een **p-reeks** (*projectieve puntenreeks*). De *elementen* van een p-reeks die begint met het punt A, geven we in hetgeen volgt aan met A, A' of $A^{(1)}$, A'' of $A^{(2)}$, A''' of $A^{(3)}$, … Een willekeurig punt uit zo'n reeks noteren we als $A^{(k)}$.
We spreken in dit verband ook wel over de *p-reeks* (*van*) A.

Opdracht 18

figuur 14



Zie figuur 14.
In die figuur wordt een projectieve afbeelding op l wordt vastgelegd door de dubbelpunten X en Y en door het puntenpaar (A, A').
Het punt Z is een willekeurig punt van l. Het punt Z' is het beeld van Z.

- Maak zelf deze tekening ook en gebruik die figuur dan bij het beantwoorden van de volgende vragen.
  Beantwoord die vragen echter zo, dat iemand die geen gebruik kan maken van de Cabri-figuur, je gedachtegang volledig kan volgen.

- Als we het punt Z rechts van Y kiezen, waar liggen dan de punten van de p-reeks Z?
- Als we het punt Z links van X kiezen, waar liggen dan in dat geval de punten van de p-reeks Z?«

Opdracht 19

Natuurlijk kan het punt A (zie weer figuur 13) zelf ook op als beeldpunt optreden van een punt B van l. Het punt B is dan het origineel van het punt A. We noemen B ook wel het *inverse beeld* van het punt A bij de beschouwde projectieve afbeelding van de lijn l op zichzelf.

- Waar op de lijn l ligt het punt B in dit geval? Geef kort aan hoe je B, uitgaande van A, kan construeren.

De punten die ontstaan door telkens de 'inverse projectieve afbeelding' toe te passen, zouden we de *inverse p-reeks* van het beginpunt van die reeks kunnen noemen.

- Construeer een aantal punten uit de inverse p-reeks van A.
  Aanwijzing – Kies hiervoor het punt A' weer links van het punt A en beide op het lijnstuk XY, maar dan in de buurt van het punt Y.
- Als je de punten van de inverse p-reeks van A bekijkt, is het dan mogelijk, dat een punt uit die reeks links van het punt X komt te liggen? Verklaar je antwoord kort.«

7. Drie eigenschappen van een p-reeks

Eigenschap 1. We hebben in Opdracht 17, Opdracht 18 en Opdracht 19 gezien, dat de dubbelpunten Y en X van een projectieve afbeelding van een lijn op zichzelf kunnen worden beschouwd als limietpunten van de p-reeks en van de inverse p-reeks van een willekeurig punt.

Eigenschap 2. In de volgende opdracht bekijken we de dubbelverhouding van punten uit een p-reeks. Er geldt namelijk:

> **Stelling 4**
> *In een p-reeks is de dubbelverhouding van twee opvolgende punten uit die reeks samen met de dubbelpunten constant.*

Opdracht 20a

We bekijken de p-reeks van het punt A: A, $B = A^{(1)}$, $C = A^{(2)}$, $D = A^{(3)}$, $E = A^{(4)}$, …, waarbij $(XABY) = d$

- Waarom geldt nu ook dat $(XBCY) = d$? Waarom is ook $(XCDY) = d$?
- Is Stelling 4 nu bewezen? Zo nee, hoe zou je dan het bewijs verder afmaken?«

Eigenschap 3. Ook geldt:

> **Stelling 5**
> *In een p-reeks is de dubbelverhouding van vier opvolgende punten constant.*

Opdracht 20b

- Geef een bewijs van Stelling 5.«

Opmerking. De in Stelling 4 en Stelling 5 bedoelde constanten zijn *niet* hetzelfde! We komen daarop terug in Opdracht 27.

8. Twee Cabri-macro's

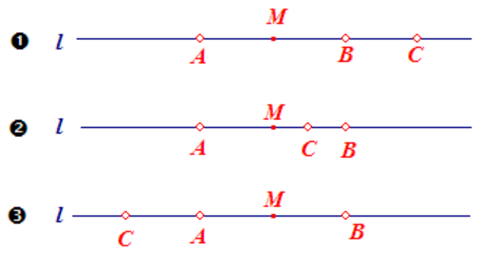
We gaan nu even terug naar de deelverhouding van drie punten op een lijn. In hetgeen volgt moeten we namelijk een aantal keren een deelverhouding in een figuur berekenen. We zullen daarvoor een Cabri-macro definiëren.

Op de lijn l liggen de punten A, B, C (zie figuur 15). Met de Cabri-functie 'Afstand' kunnen we, zoals we al eerder gedaan hebben, de lengtes van de lijnstukken CA en CB die nodig zijn voor de berekening van (ABC), bepalen. Het probleem dat we moeten oplossen is, dat als C tussen A en B ligt, de waarde van (ABC) negatief moet zijn.
We gebruiken daarbij een interne functie van Cabri: **sign** (Engels voor 'teken'). Deze functie is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{cases} \text{sign}(x) = 1 & \text{als } x > 0 \\ \text{sign}(x) = 0 & \text{als } x = 0 \\ \text{sign}(x) = -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Opdracht 21, macro:Deelverhouding

figuur 15



In figuur 15 is M het midden van het lijnstuk AB.

- Ga na dat nu in de hiernaast staande posities van het punt C bij gegeven punten A en B geldt:
  1. $CM > ½ AB$, zodat $CM – ½ AB > 0$
  2. $CM < ½ AB$, zodat $CM – ½ AB < 0$
  3. $CM > ½ AB$, zodat $CM – ½ AB > 0$

In 'Cabri-taal' kunnen we op basis hiervan schrijven: $(ABC) = \dfrac{CA}{CB} * \text{sign}(CM - \frac{1}{2} * AB)$.

- En dan kunnen we de **macro:Deelverhouding** vastleggen volgens onderstaande constructiestappen. Kies daarvoor een nieuw Cabri-tekenblad.

1	: Lijn; dit is de lijn l.
2-4	: PuntopObject(1), PuntopObject (1), PuntopObject (1); de punten A, B, C op de lijn l.
5	: Midden(A, B)
6	: Afstand(A, B)
7-9	: Afstand(C, A), Afstand(C,B), Afstand(C, M)
10	: Rekenmachine: <getal 7> / <getal 8> * sign(<getal 9> – (1/2) * <getal 6>)
11	: getal op het scherm; dit is de in stap 10 door Cabri berekende waarde van (ABC).
12	: Beginobjecten(A, B, C)
13	: Eindobjecten(<getal 11>)
14	: DefinieerMacro; bewaar de macro op disk onder de naam 'Deelverhouding'.«

Opdracht 22, macro:Dubbelverhouding

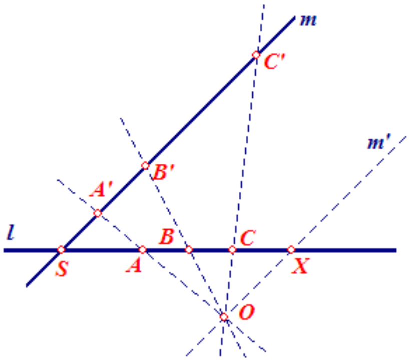
En natuurlijk kunnen we de macro:Deelverhouding direct gebruiken voor de definitie van een tweede macro, n.l. van de **macro:Dubbelverhouding**.

- Kies, indien gewenst, een nieuw Cabri-tekenblad, of gebruik de figuur uit Opdracht 21. Voer dan de volgende constructiestappen uit voor de vastlegging van deze macro:

0	: Ga uit van vier punten A, B, C, D op een lijn (in deze volgorde van links naar rechts).
1	: macro:Deelverhouding(A, B, C); berekening van (ABC).
2	: macro:Deelverhouding(A, B, D); berekening van (ABD).
3	: Rekenmachine: <getal 1> / <getal 2>
4	: getal op het scherm; dit is de in stap 3 berekende waarde van ($ABCD$).
5	: Beginobjecten(A, B, C, D)
6	: Eindobjecten(<getal 4>)
7	: DefinieerMacro; bewaar de macro op disk onder de naam 'Dubbelverhouding'.«

9. Oneigenlijk punt, de scalair van een p-reeks, p-maat

figuur 16



We komen eerst nog even terug op de centrale projectie van een lijn l op een lijn m.
In figuur 16 ligt het centrum O van de perspectiviteit op de lijn m' door het punt X evenwijdig met de lijn m.
Op l kunnen we 'gewoon' de dubbelverhouding $(ABCX)$ uitrekenen.
Is nu $(ABCX) = p$, dan is volgens Stelling 1 ook $(A'B'C'X') = p$.

Maar waar ligt in dit geval het punt X' op m? De lijnen m en m' zijn immers evenwijdig.

Om dit probleem te omzeilen is in de projectieve meetkunde afgesproken, dat op elke rechte lijn een bijzonder punt ligt, namelijk het zogenoemde **oneigenlijke punt** van die lijn (dat punt wordt soms ook wel het *punt op oneindig* genoemd). Bij die afspraak hoort ook, dat evenwijdige lijnen *hetzelfde* oneigenlijk punt hebben.
Het direct berekenen van bijvoorbeeld de dubbelverhouding van vier punten waarvan één dat oneigenlijke punt is, is evenwel onmogelijk. Vandaar dat aanvullend geldt:

Afspraak. Is L het oneigenlijk punt van een lijn l, dan is voor *elk* drietal andere punten A, B, C op l:

$$(ABCL) = (ABC)$$

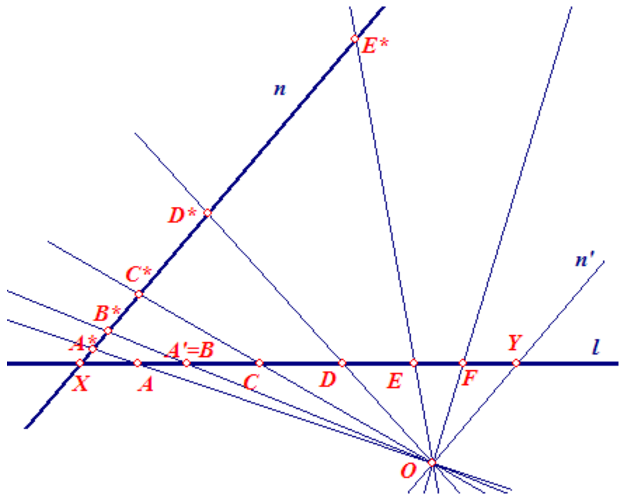
Opdracht 23

- Toon nu aan dat, op grond van deze definitie, in figuur 16 geldt: $p = \dfrac{C'A'}{C'B'} = (A'B'C')$.
- Gebruik de macro's Dubbelverhouding en Deelverhouding in een door jezelf gemaakte figuur (als die in figuur 16) om $p = (ABCX)$ en $(A'B'C')$ te berekenen. Voeg een afdruk van je figuur toe aan je verslag.
  Aanwijzing bij het gebruik van de macro's – Zorg dat de macro's geladen zijn. Kijk daartoe in het *Macro*-menu van Cabri (in de lijst moet je dan functies zien als *Dubbelverhouding* en *Deelverhouding*).
  Kies de gewenste functie en selecteer de punten A, B, C, X (in deze volgorde) cq. A', B', C' (ook in deze volgorde). De waarde wordt daarna berekend en kan via een muisklik op het tekenblad worden gezet.«

Opdracht 24

In figuur 17 zijn de punten X en Y de dubbelpunten van een projectieve afbeelding die verder is vastgelegd door de punten A en $A' = B$.
Ook is een deel van de p-reeks A weergegeven, waarbij dan $A'' = C$, $A''' = D$, …
De lijn n is een willekeurige lijn door X, terwijl de lijn n' door Y gaat en evenwijdig is met n. Het oneigenlijke punt van de lijn n geven we aan met N.
Het punt O, dat ligt op de lijn n', is het centrum van een centrale projectie van l op n. De beelden van de punten A, B, C, … op n zijn aangegeven met A^*, B^*, C^*, …

figuur 17



- Maak nu zelf ook een Cabri-figuur als figuur 17.
- 🖹 Controleer dan met de macro Dubbelverhouding of inderdaad geldt dat:
  ($ABCD$) = ($BCDE$) = ($CDEF$)
  Op welke stelling is dit gebaseerd? Welke waarde heeft in jouw geval ($ABCD$)?
- 🖹 Bereken met de macro Deelverhouding de waarde van (B^*A^*X) op de lijn n.
- 🖹 Bereken met de macro Dubbelverhouding ($BAXY$) op de lijn l.
- 🖹 Bereken op de lijn n ook de waarden van opvolgend (C^*A^*X), (D^*A^*X), (E^*A^*X), (F^*A^*X).
- 🖹 Beschrijf kort je bevindingen op basis van de bovenstaande berekeningen.«

Bewijs. Hierna volgt het bewijs van enkele zaken die in Opdracht 24 aan de orde zijn gekomen.

Zij ($BAXY$) = s. Vanwege de centrale projectie is dan ook

$$(B^*A^*XN) = s$$

immers het punt X is dubbelpunt van de projectieve afbeelding en het beeld van het punt Y is hier het oneigenlijk punt N van de lijn n.
We vinden dan:

$$(B^*A^*XN) = \frac{XB^*}{XA^*} : \frac{NB^*}{NA^*} = \frac{XB^*}{XA^*} : 1 = \frac{XB^*}{XA^*}$$

zodat inderdaad geldt:

$$s = \frac{XB^*}{XA^*} = (B^*A^*X)$$

Merk op dat de waarde van s direct bepaald is als we de projectiviteit op de lijn l vastleggen via X, Y, A en $A' = B$. De waarde van s is dus (alleen) afhankelijk van de plaats van X, Y, A, A' (ten opzichte van elkaar) op de lijn l. Het getal is dus s constant.

We noemen het getal s de **scalair** (*schaalgetal*, soms ook *reden*) van de p-reeks van A.

Op de lijn n kan het getal s worden beschouwd als een vermenigvuldigingsfactor, immers:

$$XB^* = s \cdot XA^*$$
$$XC^* = s \cdot XB^* = s^2 \cdot XA^*$$
$$XD^* = s \cdot XC^* = s^3 \cdot XA^*, \quad \text{enz.}$$

De lijnstukken XA^*, XB^*, XC^*, … op de lijn n vormen dus een *meetkundige rij*.

Opdracht 25

- 🖹 Verklaar waarom op de lijn n geldt: $XC^* = s \cdot XB^* = s^2 \cdot XA^*$.
- 🖹 Welke deel van je antwoord op Opdracht 24 is hiermee in overeenstemming?

Ook de inverse p-reeks van A heeft natuurlijk een scalair.
🗎 Waarom is de scalair van de inverse p-reeks A gelijk aan $\frac{1}{s}$?«

Enkele afspraken. Onder de **p-maat** (van een punt) A op een lijn l, verstaan we punten van de p-reeks van A én de punten van de inverse p-reeks van A.
Het punt A noemen we in dit geval het **eenheidspunt** van de p-maat.
De scalair s van de p-reeks A noemen we in dit geval ook de **scalair van de p-maat** A.

Er geldt:

Stelling 6
Is B een punt van de p-maat van A, dan is A een punt van de p-maat van B.

Opdracht 26

🗎 Geef een bewijs van Stelling 6.
🗎 Is het nu zo, dat de scalair van de p-maat A gelijk is aan de scalair van de p-maat B? Verklaar je antwoord.«

Opdracht 27

Een p-maat A is op de lijn l vastgelegd door de punten X, Y (dit zijn de dubbelpunten) en de punten A, A'. De scalair van de p-maat A is gelijk aan s.

🗎 Als $(XAA'Y) = d$, laat dan zien dat $d = \dfrac{s}{s-1}$. (*Aanwijzing* – Zie eventueel Opdracht 5.)

P, Q, R, S zijn vier opvolgende punten van de p-maat A. Volgens Stelling 5 is nu $(PQRS)$ een constante.

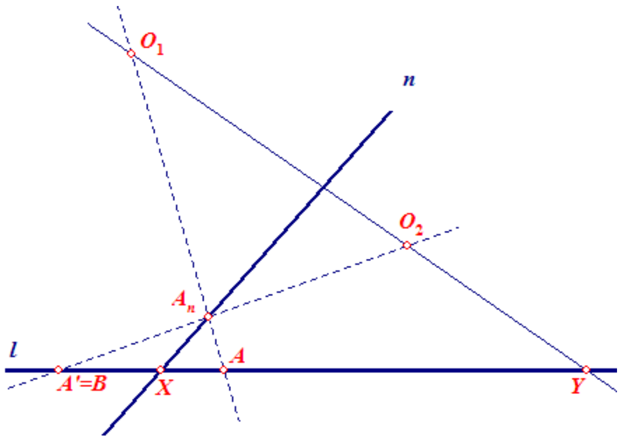
🗎 Als $(PQRS) = p$, toon dan aan dat $p = \dfrac{s^2+2s+1}{s^2+s+1}$.
🗎 Zijn de hier gevonden resultaten in overeenstemming met de opmerking na Opdracht 20b? Verklaar je antwoord.
🗎 Voor welke waarde(n) van s is $(PQRS)$ gelijk aan 0?
Wat heeft dit voor gevolg voor de punten P, Q, R, S ? Uit hoeveel punten bestaat de p-reeks A in dit geval?
Is een en ander dan in overeenstemming met Eigenschap 1 uit paragraaf 7? Zo niet, waarom niet? En hoe zou je die eigenschap dan nu formuleren?
🗎 Hoe zit het eigenlijk met Stelling 4 en Stelling 5 als de scalair van de p-maat gelijk is aan -1?«

10. Negatieve scalair

In figuur 12 en Opdracht 14 (kijk daar nog eens naar!) legden we de basis voor een projectieve afbeelding van een lijn l op zichzelf. We gebruikten daarbij een hulplijn n en twee centrale projecties met centra O_1 en O_2.
In figuur 18 is dat ook gedaan, maar hier liggen (anders dan in figuur 12) de punten O_1 en O_2 aan *verschillende* kanten van de hulplijn n.
Het beeldpunt van A bij deze projectieve afbeelding is het punt $A' = B$. De punten X en Y, opvolgend het snijpunt van l met de (willekeurige) lijn n en van de lijn l met de lijn O_1O_2, zijn weer de dubbelpunten van de beschouwde projectieve afbeelding.

Opdracht 28

figuur 18



- Maak zelf nu ook een dergelijke tekening en geef daarin via constructie de punten $B' = C$, $C' = D$ en $D' = E$ aan.

In het bewijs dat volgt op Opdracht 28, hebben we gezien dat $(BAXY) = s$, waarbij s de scalair is van de p-reeks A op de lijn l.

- Bereken met de macro Dubbelverhouding de waarde van s in dit geval.

Voeg een afdruk van de door jou gemaakte figuur waarop ook de waarde van s staat, toe aan je verslag.

Als het goed is, heb je een *negatieve* waarde van s gevonden.

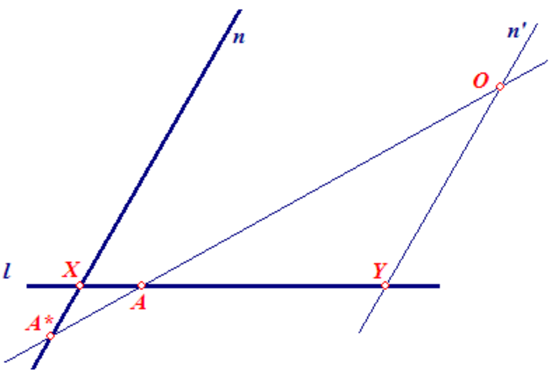
Bereken nu ook de waarde van $p = (ABCD)$.

Controleer of ook nu geldt dat $p = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + s + 1}$ (zie Opdracht 28 voor deze formule).«

Opdracht 29

We kunnen ook bij negatieve scalairen gebruik maken van het oneigenlijke punt N van de lijn n. Daardoor hebben we slechts één centrum O nodig. Dat punt O ligt dan op de lijn n' door Y die evenwijdig is met de lijn n (zie Opdracht 24).

figuur 19



In figuur 19 is een begin gemaakt van de constructie van de p-reeks A op de lijn l, waarvan de scalair gelijk is aan $-1\frac{1}{2}$.

- Maak een tekening ongeveer zoals die hiernaast staat.

Construeer dan allereerst het punt B^* op de lijn n en vervolgens het punt $B = A'$ op de lijn l. Geef in je verslag aan *hoe* je met Cabri het punt B geconstrueerd hebt.

De punten C en D volgen in de p-reeks A op het punt B. Construeer ook punten C en D. Voeg daarna een afdruk van de figuur toe aan je verslag.«

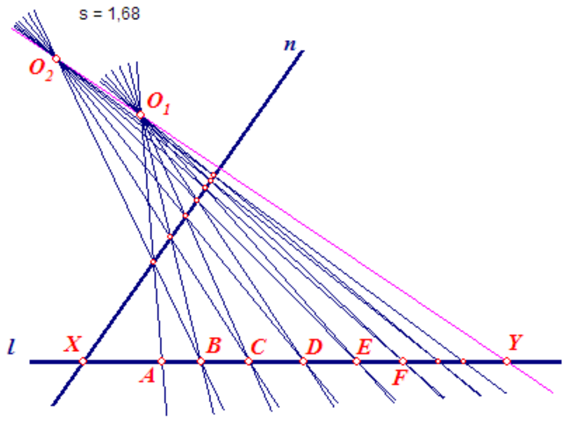
11. Tot slot

In de volgende twee opdrachten kijken we naar bijzondere p-reeksen.

In figuur 20 zijn A, B, C, D, E, F, ... opvolgende punten van de p-reeks A. Die reeks is weer geconstrueerd via de centra O_1, O_2 en met de hulplijn n.
De punten X en Y zijn de dubbelpunten van de projectieve afbeelding van de lijn l op zichzelf.

Opdracht 30, kwadrateren

figuur 20



We beschouwen nu een *nieuwe* p-reeks op l waarvan de opvolgende punten zijn: A, C, E, … ; we slaan dus telkens één punt uit de eerste p-reeks over. X en Y zijn ook hier dubbelpunten bij de nieuwe p-reeks.

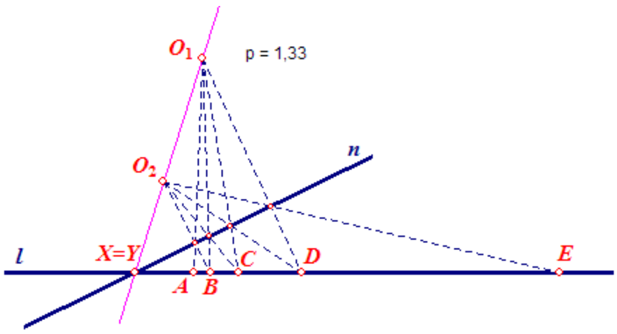
- Maak eenzelfde figuur als hiernaast staat. Bepaal met de macro Dubbelverhouding de scalair s van de (oude) p-reeks A, B, C, D, … (N.b. Hiernaast is $s = 1{,}68$; in jouw figuur hoeft dat natuurlijk niet zo te zijn.)

Het punt O_1 blijft het eerste projectiecentrum van de nieuwe p-reeks.

- Construeer het tweede projectiecentrum O_2' van de nieuwe p-reeks. Geef een korte beschrijving van je constructie.
  Ga na dat nu inderdaad het punt C wordt afgebeeld op het punt E.
  Voeg ook nu weer een afdruk van je tekening toe aan je verslag.
- Bepaal eveneens de scalair s' van de nieuwe p-reeks.
  Wat is het verband tussen s en s' ? Geef daarvoor zo mogelijk een verklaring.«

Opdracht 31, samenvallende dubbelpunten

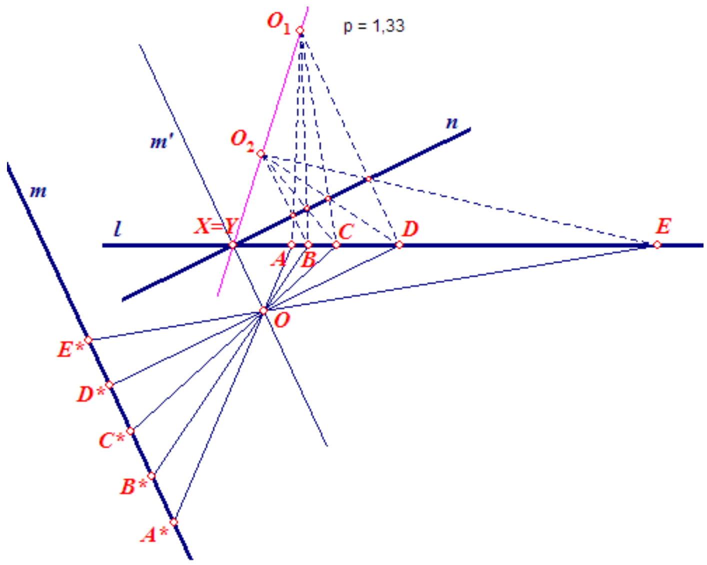
figuur 21



In figuur 21 zijn we uitgegaan van een lijn l waarop via O_1 en O_2 en de lijn n een bijzondere p-reeks A is geconstrueerd, bestaande uit de punten A, B, C, D, E, ….
De p-reeks is bijzonder omdat hier de dubbelpunten X en Y samenvallen.

- Maak zelf ook een figuur als figuur 21.
  Bereken daarna met de macro Dubbelverhouding ook de waarde van $p = (ABCD)$.
- Ga na of door verplaatsing van een of meer onafhankelijke objecten de waarde van p verandert. Beschrijf je bevindingen kort.
- Bewijs dat in dit geval voor de p-reeks A op l geldt: $s = (BAXY) = 1$ (gebruik hierbij de macro dus alleen als controle).
- Onderzoek of ook hier geldt dat $p = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + s + 1}$ (zie weer Opdracht 28 voor deze formule).

figuur 22



In figuur 22 is voortgebouwd op figuur 21.
De lijn m is een willekeurig lijn.
De lijn m' is evenwijdig aan m en gaat door het punt X (= Y). Op m' ligt het punt O, dat als centrum dient van een centrale projectie van de (punten van de) lijn l op de (punten van de) lijn m.
De beeldpunten van A, B, C, … zijn de punten A^*, B^*, C^*, …

- Breng de constructie van jouw figuur hiermee in overeenstemming.

🖹 Waarom is de reeks punten A^*, B^*, C^*, … een projectieve p-reeks op de lijn m?
🖹 Hoe groot is de scalair $s*$ van de p-reeks A^* ? (Maak hierbij *geen* gebruik van een macro!)
🖹 Bereken $p* = (A^*B^*C^*D^*)$.
(*Aanwijzing* – Gebruik ook hier *geen* macro, maar maak gebruik van een formule…)

Het oneigenlijk punt van de lijn m noemen we M.
🖹 Van welk punt van l is het punt M het beeldpunt bij de centrale projectie van de lijn l op de lijn m? Geef een korte verklaring van je antwoord.

We zullen bewijzen dat $A^*B^* = B^*C^* = C^*D^* = \ldots$
Bij dat bewijs kunnen we gebruik maken van het feit dat $(MA^*B^*M) = (MB^*C^*M)$.

🖹 Uit welke stelling volgt dit laatste?
🖹 Leid uit $(MA^*B^*M) = (MB^*C^*M)$ af, dat inderdaad $A^*B^* = B^*C^*$.«

In de laatste opdracht van dit werkblad bekijken we een andere manier van vastleggen van een projectieve afbeelding van een lijn op een tweede lijn.

Opdracht 32, perspectiviteitsas

In figuur 23 is uitgegaan van de lijnen l en l' met daarop opvolgend de willekeurige punten A, B, C en A', B', C'.
Een afbeelding van l op l' is vastgelegd door de puntenparen (A, A'), (B, B'), (C, C').
Op de lijn AA' zijn de punten P en P' eveneens willekeurig gekozen. De lijnen PB en $P'B'$ snijden elkaar in B^*, de lijnen PC en $P'C'$ snijden elkaar in C^*. De lijn $p = B^*C^*$ snijdt AA' in A^*.

- Maak zelf ook een tekening zoals die in figuur 23.

Op de lijn l ligt ook het punt D.

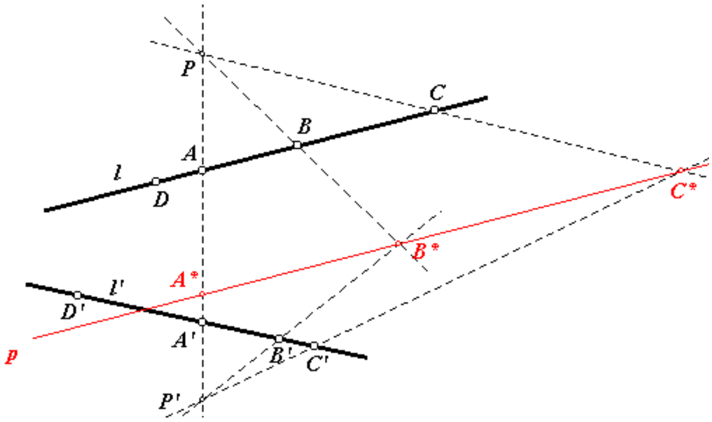
🗎 Construeer via de perspectiviteitscentra P en P' het punt D' op l' (een en ander naar analogie van bijvoorbeeld de punten B en B'; uiteraard ligt dan het punt D^* op de lijn p). Voeg een afdruk van deze constructie toe aan je verslag.

🗎 Bewijs dat $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

🗎 Bereken met behulp van de macro Dubbelverhouding in jouw figuur de waarde van $(ABCD)$.
N.b.. Kijk in het *Macro*-menu van Cabri of de macro geladen is.

🗎 Waarom is de afbeelding van l op l' een projectieve afbeelding?«

figuur 23



> **Afspraak**. De lijn p wordt de **perspectiviteitsas** (ook wel **collineatie-as**) van de afbeelding van l op l' genoemd.

12. Literatuur

[1] H.S.M. Coxeter: *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley & Sons (1969).
[2] id.: *Projective Geometry*. New York: Springer-Verlag (1987).
[3] K. Döhlemann: *Projectieve Geometrie in synthetischer Behandlung*. Berlijn: Sammlung Göschen (1918).
[4] Lawrence Edwards: *Projective Geometry*. Phoenixville: Rudolf Steiner Institute (1985).
[5] Martin Kindt: *Lessen in projectieve meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (1993).
[6] Nick Thomas: *Projective Geometry*. Website: http://www.anth.org.uk/NCT/ .

Auteur: **Dick Klingens**
Titel: Cabri-werkblad / Projectieve meetkunde: enkele eerste stappen
Versie: 1.2(a) / oktober 2005