Cabri-werkblad
Pool en poollijn bij cirkels (vervolg)

1. Inleiding

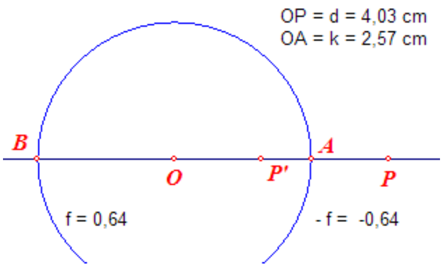
Dit werkblad is een vervolg op het Cabri-werkblad 'Pool en poollijn bij cirkels', waarin basiskennis omtrent de pooltheorie bij cirkels werd behandeld.
In dit vervolg bekijken we vooral de begrippen *dubbelverhouding* en *harmonische ligging*, die ook een rol spelen in de pooltheorie. We zullen naar het eerste deel van het werkblad verwijzen met de aanduiding WB1.
We gaan er van uit dat leerling zich de inhoud van WB1 heeft eigen gemaakt, en eigenlijk ook dat hij/zij, bij het doorwerken van het voorliggende, het werkblad WB1 onder handbereik heeft.
Uiteraard dient de leerling bekend te zijn met het gebruik van het programma Cabri Geometry II (Plus), in het bijzonder met de functie 'Rekenmachine'.

N.b. In de opdrachten staat vaak het teken 🖹. De bedoeling daarvan is dat de uitwerking van zo'n onderdeel *in ieder geval* opgenomen wordt in een verslag (of op een antwoordblad).
Het einde van elke opdracht wordt aangegeven met het teken «.

2. Dubbelverhouding

Opdracht 1

We gaan uit van een cirkel O (met straal k) en een punt P (buiten die cirkel). De lijn OP snijdt (O) in de punten A en B.



- Maak een Cabri-tekening als in nevenstaande figuur.
- Bereken dan met de Cabri-functie 'Afstand' de lengtes van de lijnstukken OA en OP (de lijnstukken zelf behoeven daarbij niet getekend te worden).

Nu is $OA = k$. Stel verder $OP = d$.

- Bereken met de functie 'Rekenmachine' de waarde van k/d. Dit getal zullen we verder aanduiden met f.
- Voer dan met Cabri een vermenigvuldiging van het punt P uit, waarbij B het centrum en f de factor is (kies de Cabri-functie 'Vermenigvuldiging', selecteer dan eerst het punt P, vervolgens het punt B en dan het getal f). Je krijgt als beeldpunt van P het punt P' dat ligt op de lijn OP.
- Teken met de macro PoolEnPoollijn de poollijn van het punt P bij (O).

🖹 Verplaats nu het punt P; geef P verschillende posities, ook *binnen* en *op* de cirkel.
Doe verslag van je waarnemingen bij bovenstaande constructies en van het uiteindelijke resultaat.

- Wis het punt P' (merk op, dat de poollijn niet wordt gewist) en bereken vervolgens met de functie 'Rekenmachine' de waarde van $-f$ (het tegengestelde van f).
- Voer dan een vermenigvuldiging van P uit, nu met het punt A als centrum en met $-f$ als factor (selecteer na keuze van de functie 'Vermenigvuldiging' het punt P, dan het punt A en selecteer daarna het getal $-f$).

🖹 Wat stel je nu vast?«

Afspraak. We noemen het punt P' het **toegevoegde punt** van P bij de cirkel. Overigens is P ook het toegevoegde punt van P'.

N.b. We hebben in Opdracht 1 gezien dat we het toegevoegde punt P' van een punt P bij een cirkel O kunnen vinden als het snijpunt van de lijn OP met de poollijn van P bij die cirkel.
Trouwens, Cabri heeft een ingebouwde functie, namelijk de functie 'Inversie', waarmee je direct zo'n toegevoegd punt kunt tekenen (de functie 'Inversie' is te vinden in het *Afbeeldingen*-menu, het zesde menu van links).

In Opdracht 1 hebben we verder gevonden dat:

$$BP' = f \cdot BP = \frac{k}{d} \cdot BP$$
$$AP' = -f \cdot BP = -\frac{k}{d} \cdot AP$$

Het minteken in de laatste uitdrukking duidt er *alleen* op, dat de punten P en P' aan verschillende kanten van het punt A liggen; de lengte van het lijnstuk AP' is evenwel gelijk aan f maal de lengte van het lijnstuk AP.

Opdracht 2

Laat nu zien dat de 'dubbele verhouding' $\dfrac{AP}{AP'} : \dfrac{BP}{BP'}$ gelijk is aan -1.«

Afspraak. Deze dubbele verhouding, die is opgebouwd uit vier lijnstukken, noemen we de **dubbelverhouding** van de punten(paren) P, P' en A, B.
We schrijven in plaats van $\dfrac{AP}{AP'} : \dfrac{BP}{BP'}$ bijna altijd $(PP'AB)$.

We hebben nu bewezen:

Stelling 1a
Voor een punt P van een middellijn AB van een cirkel en het bij die cirkel aan P toegevoegde punt P' (dat ook op de lijn AB ligt) geldt:

$$(PP'AB) = -1$$

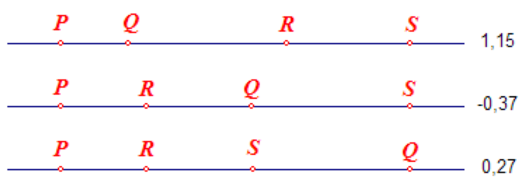
Bekijken we algemeen de dubbelverhouding van vier punten (twee punten paren) P, Q, R, S, die wel op dezelfde lijn moeten liggen, dan noemt men die verhouding **harmonisch** indien

$$(PQRS) = -1$$

Men spreekt liever van **harmonische verhouding** dan van harmonische dubbelverhouding.
We zeggen ook wel, dat de puntenparen P, Q en R, S elkaar **harmonisch scheiden**.

Het negatief zijn van $(PQRS)$ wil dan zeggen, dat precies één punt van het ene paar *tussen* de beide punten van het andere paar ligt.

Voorbeelden.



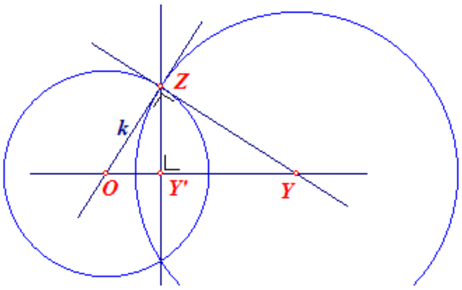
In de figuur hiernaast is telkens de dubbelverhouding $(PQRS)$ berekend.
Merk op dat er alleen in het tweede voorbeeld sprake is van *scheiding* van de puntenparen P, Q en R, S.

We kunnen Stelling 1a dan ook als volgt formuleren:

Stelling 1b
Twee toegevoegde punten P en P' bij een cirkel scheiden de snijpunten van de lijn PP' met die cirkel harmonisch
N.b. De lijn PP' gaat door het middelpunt van de cirkel.

3. Loodrecht snijdende cirkels

Opdracht 3



- Teken op een nieuw tekenblad een cirkel O met op die cirkel een punt Z. Teken ook de raaklijn in Z aan (O) en kies op die raaklijn een (willekeurig) punt Y.
- Teken de cirkel Y die door Z gaat.

We zeggen nu dat (O) en (Y) **elkaar loodrecht snijden**.
Dit is dus het geval als in een snijpunt van die cirkels de raaklijn aan de ene cirkel gaat door het middelpunt van de andere cirkel.

Het voetpunt van de loodlijn uit Z op de lijn OY is het punt Y'.

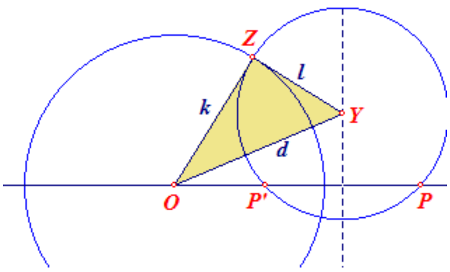
Waarom is het punt Y' het toegevoegde punt van Y bij (O)?
Aanwijzing. Hoe construeerde je de machtlijn van een punt ook al weer? Zie daartoe WB1.

Uit deze figuur volgt een methode om bij een gegeven cirkel O en een gegeven punt Y de cirkel (Y) te construeren die (O) loodrecht snijdt.

Geef de constructiestappen hiervoor.
Zie je nog een tweede methode voor een dergelijke constructie? Zo ja, geef daarvoor dan ook de constructiestappen.«

Opdracht 4

We gaan uit van een cirkel O, een punt P en het punt P' dat het toegevoegde punt is van P bij (O). Het middelpunt van een cirkel die door P en P' gaat, ligt uiteraard op de middelloodlijn van het lijnstuk PP'. Zij Y nu het middelpunt van zo'n (willekeurige) cirkel door P en P'. Het punt Z is één van de snijpunten van (O) en (Y).



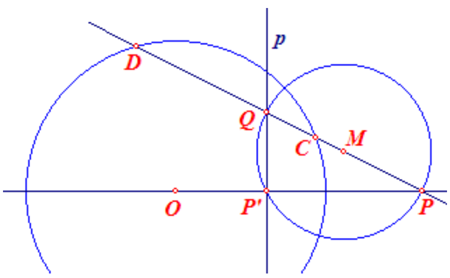
In de tekening is $OZ = k$, $ZY = l$ en $OY = d$. We weten in ieder geval dat: $OP \cdot OP' = k^2$.

Waarom is dat (ook al weer) zo?

Nu is driehoek OYZ een in Z rechthoekige driehoek.

Bewijs dat.
Aanwijzing. Hoe groot is de macht van O bij cirkel Y (zie WB1)?

De cirkels (O) en (Y) snijden elkaar dus loodrecht.



Op de poollijn p van P bij (O) kiezen we, binnen (O), een punt Q. De lijn PQ snijdt (O) in de punten C en D. (M) is de omcirkel van driehoek $PP'Q$.

Waarom ligt het punt M op de lijn PQ?
Waarom snijden (O) en (M) elkaar loodrecht?

Bewijs dat ($PQCD$) = -1.
Aanwijzing. Kijk naar cirkel M.«

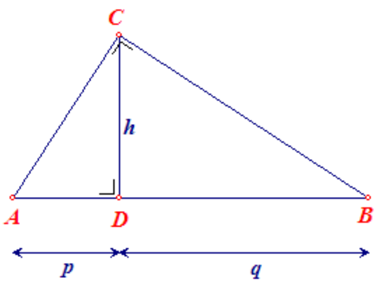
We kunnen hetgeen we gevonden hebben in Opdracht 4, nu in de volgende stelling formuleren (zij het wat gecompliceerd).

Stelling 2
Een vast punt P en het snijpunt Q van een lijn door P met de poollijn van P bij een cirkel scheiden de snijpunten C, D van die lijn met die cirkel harmonisch.

In opdracht 5 bewijzen we de volgende hulpstelling.

Stelling 3
In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de hoogtelijn op de schuine zijde gelijk aan het product van de stukken waarin die hoogtelijn de schuine zijde verdeelt.

Opdracht 5



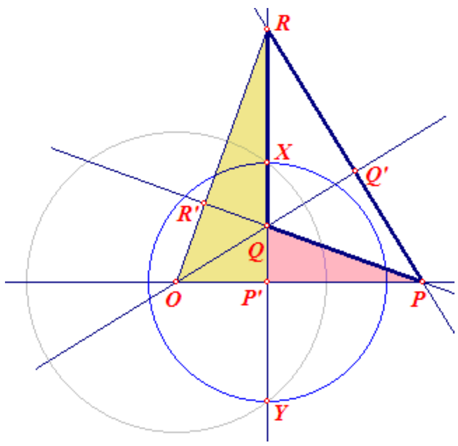
Stelling 3 zegt dat in nevenstaande figuur geldt: $h^2 = p \cdot q$ (ga dat na!).

- Toon aan dat driehoek *ADC* gelijkvormig is met driehoek *CDB*.

Uit deze gelijkvormigheid volgt dat er eenzelfde vermenigvuldigingsfactor f bestaat tussen de zijden van beide driehoeken.

- Welke zijden van beide driehoeken komen in die zin met elkaar overeen? Laat hiermee zien, dat inderdaad $h^2 = p \cdot q$.«

Opdracht 6a



In de figuur hiernaast is driehoek *PQR* een pooldriehoek van (*O*); zie WB1 voor de definitie van pooldriehoek.
De loodlijnen *OP*, *OQ* en *OR* op de zijden van *PQR* snijden de zijden in opvolgend de punten *P*′, *Q*′, *R*′.

- Waarom zijn *P*′, *Q*′, *R*′ de toegevoegde punten van *P*, *Q*, *R* bij (*O*)?
- Toon aan dat de driehoeken *OP*′*R* en *QP*′*P* gelijkvormig zijn.
- Laat nu zien dat uit die gelijkvormigheid volgt dat
$$P'Q \cdot P'R = OP' \cdot P'P$$
- Waarom is ook $OP' \cdot P'P = (P'Y)^2$?
Aanwijzing. Die hulpstelling hebben we niet voor niets bewezen…

In de figuur is ook de cirkel met middellijn *XY* getekend; *X* en *Y* zijn de snijpunten van de lijn *QR* met (*O*).

- Bewijs dat *Q* en *R* toegevoegde punten zijn bij (*P*′).
- Bewijs hiermee dat (*QRXY*) = -1.«

Opdracht 6b

Dat in de figuur van Opdracht 6a geldt: (*QRXY*) = -1, kan je ook bewijzen met Stelling 2.

- Laat zien hoe je dat kan doen.«

Opdracht 7

Het hoekpunt P van de pooldriehoek PQR bij (O), zie Opdracht 6a, ligt buiten (O). Gevolg daarvan is, dat de poollijn van P de cirkel O snijdt in twee punten, te weten X en Y.

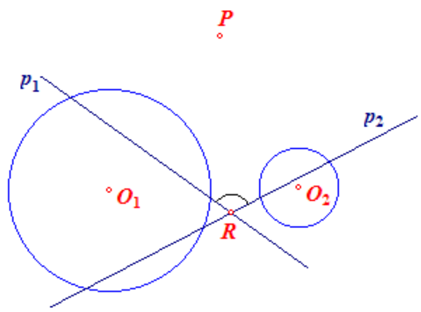
- Waarom volgt nu uit $(QRXY) = -1$ dat één van de punten Q, R dan ook buiten de cirkel moet liggen?
  Aanwijzing. Kijk nog eens naar de definitie van harmonische verhouding, en naar wat daarop volgt.«

4. Tot slot, enkele aanvullende opdrachten

Opdracht 8

- Bewijs dat de poolcirkel van een driehoek de zijden van die driehoek in punten snijdt die harmonisch liggen met de hoekpunten.«

Opdracht 9



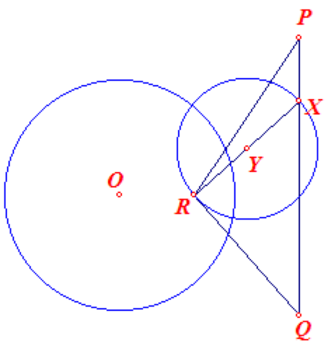
Gegeven zijn twee cirkels (O_1) en (O_2). Van een punt P zijn p_1 en p_2 de poollijnen bij opvolgend (O_1) en (O_2). Deze lijnen snijden elkaar in het punt R.

- Waar moet het punt P gekozen worden opdat beide poollijnen elkaar in het punt R *loodrecht* snijden?
  Aanwijzing. Maak een Cabri-figuur en doe daarmee onderzoek.
- Geef een korte beschrijving van de manier waarop je aan je antwoord op de hieraan voorafgaande vraag gekomen bent.

Opmerking. Er wordt eigenlijk gevraagd naar de *meetkundige plaats* van de punten P waarvan de poollijnen bij twee cirkels elkaar loodrecht snijden.

- En uiteraard is ook een bewijs hiervan van (wiskundig) belang. Geef zo'n bewijs.«

Opdracht 10



Gegeven is een in R *stomp*hoekige driehoek PQR.

- Construeer de poolcirkel O van deze driehoek.
  Voeg een afdruk van je constructie toe aan het verslag. Vermeld daarin ook de gebruikte constructiestappen.
  Aanwijzing. Kijk nog eens in WB1 hoe je dat kan doen.

Op de zijde PQ van PQR ligt het punt X. Het midden van het lijnstuk RX is het punt Y.

- Bewijs dat de cirkel met middellijn RX en de poolcirkel van PQR elkaar loodrecht snijden.«

Opdracht 11

P en Q zijn twee verschillende punten. PM en QN zijn de loodlijnen uit elk punt op de poollijn van het andere punt bij een gegeven cirkel O.

- Maak eerst een geschikte Cabri-figuur en bereken de verhoudingen OP/PM en OQ/QN.
- Voeg een afdruk van die figuur toe aan het verslag. Op die afdruk moeten de waarden van deze verhoudingen eveneens voorkomen.
  Wat valt je op als je beide berekeningen hebt uitgevoerd?
  Ga ook na of datgene wat je hebt waargenomen, bij elke ligging van P en Q ten opzichte van de cirkel O klopt.
- Bewijs dat $OP : PM = OQ : QN$.«

Auteur: **Dick Klingens**
Titel: Cabri-werkblad / Pool en poollijn bij een cirkel, vervolg
Versie: 1.1 / november 2005