Cabri-werkblad

Omtrekshoeken

Nb. Dit werkblad wordt ondersteund met enkele CabriJava applets. Deze applets zijn bereikbaar via *www.pandd.nl*.

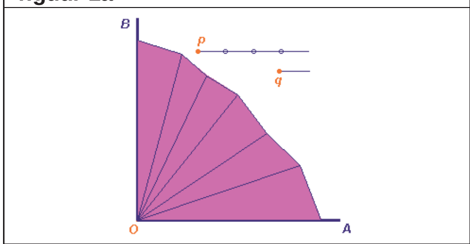
1. Inleiding

Bij het meten van hoeken maken we meestal gebruik van het feit dat we een gestrekte hoek kunnen verdelen in 180 gelijke deelhoekjes. We zeggen dan dat de grootte van zo'n deelhoekje **1 graad** is: het 180ste deel van een gestrekte hoek is een hoek van 1°.
De grootte van een gestrekte hoek is dus 180°.
Een **rechte hoek** wordt gedefinieerd als de helft van een gestrekte hoek.
De grootte van een rechte hoek is dus 90°.

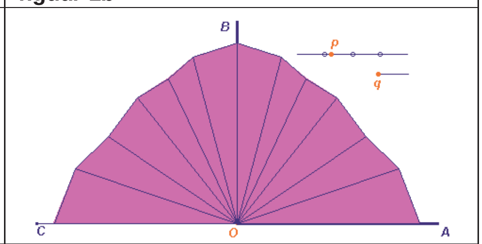
Bekijk nu de CabriJava applet **Omtrek1**.

In onderstaande figuur hebben we vier rechte hoeken (uitgaande van de rechte hoek AOB) op bijzondere manier tegen elkaar geplakt: deze vier rechte vormen zo een zogenoemde **volle hoek**.

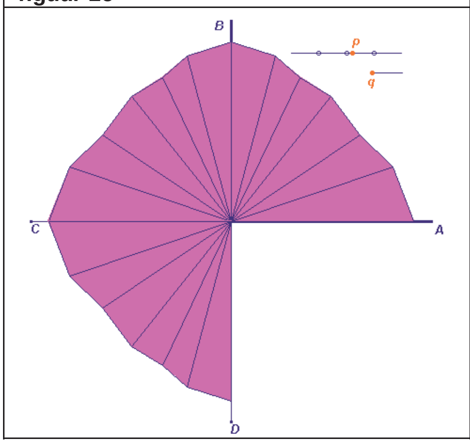
figuur 1a



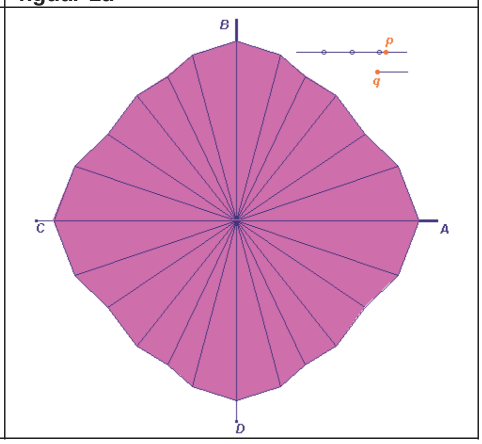
figuur 1b



figuur 1c



figuur 1d

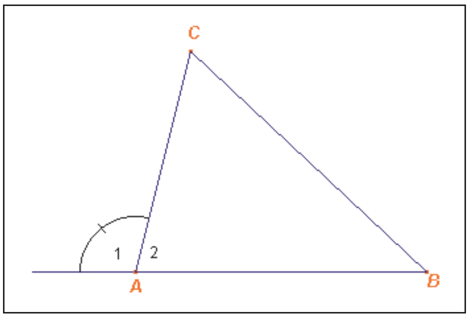


Opdracht 1

Hoeveel graden telt een volle hoek?

We bewijzen vervolgens een hulpstelling die je wellicht kan gebruiken bij een enkel bewijs op dit werkblad.

Hulpstelling – stelling van de buitenhoek
Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken van die driehoek.



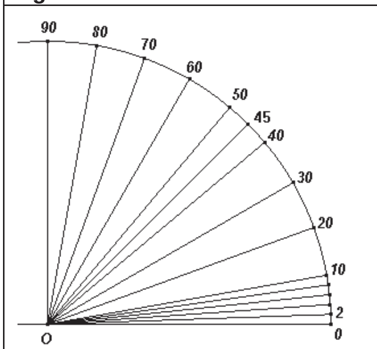
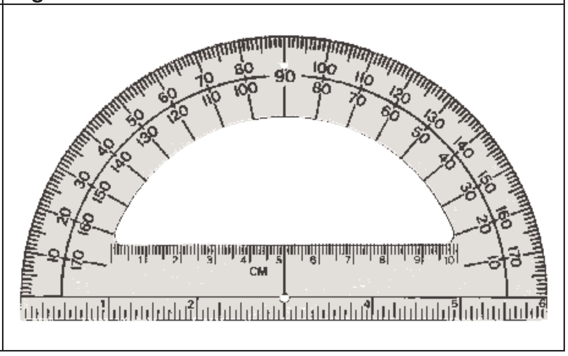
Bewijs – In de figuur hiernaast is $\angle A_1$ een buitenhoek van driehoek *ABC*. De hoeken *B* en *C* van driehoek *ABC* zijn dan **niet-aanliggende binnenhoeken**, omdat ze geen nevenhoek zijn van die hoek A_1 (hoek A_2 is dat wel).
Nu geldt

$$\angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle C + \angle A_2 = 180^\circ$$

En daaruit volgt direct dat $\angle A_1 = \angle B + \angle C$.

2. Cirkel en middelpuntshoek

figuur 2a	figuur 2b
	

We kunnen op basis van de verdeling van een volle hoek in hoeken van 1° ook de omtrek van een cirkel in hetzelfde aantal stukjes verdelen. De 'lengte' van zo'n cirkelboogje geven we ook aan met 1°; we spreken ook wel van 1 b o o g g r a a d.
Hierboven, in figuur 2a, is dat gedeeltelijk (in stapjes van 2° en 10°) gedaan voor een cirkelboog van 90°.
Op het principe van de verdeling van een gestrekte hoek in 180° is ook de zogenoemde gradenboog van de geodriehoek gebaseerd. Een 'echte' gradenboog zie je in figuur 2b.

Natuurlijk kan je ook de lengte van een cirkelboog van 1° in cm uitdrukken.
Daarbij moet je de lengte *R* van de straal van de cirkel weten, immers de totale omtrek van een cirkel met straal *R* is gelijk aan $2\pi R$.

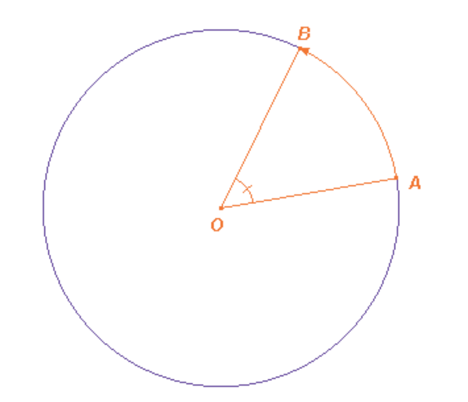
Opdracht 2
Van een cirkel is de straal *R* gelijk aan 5 cm.
- Bereken de lengte van een boog van 1° van die cirkel in cm (in één decimaal).
- Neem vervolgens de straal van de cirkel gelijk aan 10 cm. Hoe groot is de lengte van een boog van 1° nu?

Nb. Schrijf je berekeningen in beide gevallen volledig op!

Het voordeel van het werken met b o o g l e n g t e s in graden is, dat de booglengte niet afhankelijk is van de straal van de cirkel.
Uit het bovenstaande volgt nu eenvoudig de volgende stelling.

Stelling 1
De lengte van een cirkelboog (in booggraden) is gelijk aan het aantal graden van de middelpuntshoek die op die boog staat.

figuur 3



In de figuur 3 is $\angle AOB$ de middelpuntshoek op boog AB van de cirkel met middelpunt O.
Een middelpuntshoek van een cirkel wordt dus gevormd door twee stralen van de cirkel.
Op basis van stelling 1 kunnen we nu schrijven:

$$\angle \boldsymbol{AOB} = \mathbf{bg}(\boldsymbol{AB})$$

Of in woorden:
de grootte van hoek AOB in (hoek)graden is gelijk aan de grootte van boog AB in (boog)graden.

We spreken nu ook af, dat we de grootte (lengte) van bogen op een cirkel in hetgeen volgt zullen weergeven in graden (booggraden).
Voor de lengte l van een cirkelboog XY **in cm** zullen we schrijven:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L}(\mathbf{bg}(\boldsymbol{XY}))$$

Bekijk ook de CabriJava applet **Omtrek2**.

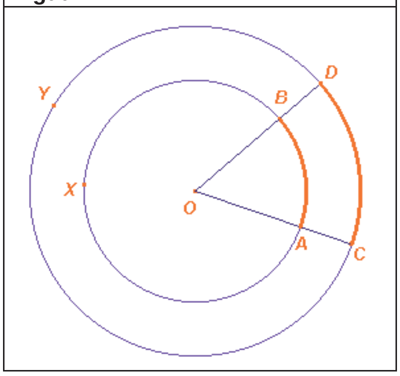
Opdracht 3

In figuur 4 zijn twee cirkels getekend met middelpunt O.
- Waarom is nu bg(AB) = bg(CD)?
- Is L(bg(AB)) = L(bg(CD))?

Verklaar in beide gevallen je antwoord.

In de figuur kan je de 'grootste' boog van elke cirkel aangeven met bg(AXD), van A via X naar B, en bg(CYD); je gebruikt dus een derde letter om mogelijke verwarring te voorkomen.
- Zijn bg(AXD) en bg(CYD) gelijk? Licht je antwoord weer kort toe.

figuur 4



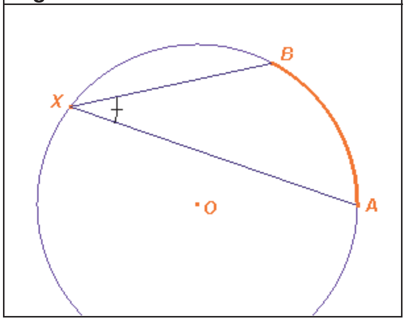
3. Omtrekshoeken

Bekijk allereerst de CabriJava applet **Omtrek3**.

Definitie
Onder een omtrekshoek van een cirkel verstaan we een hoek waarvan het hoekpunt op die cirkel ligt terwijl de benen de cirkel snijden.
Binnen een omtrekshoek ligt een boog van de cirkel. We zeggen dat de omtrekshoek op die boog staat.

Een omtrekshoek wordt dus gevormd door twee koorden van de cirkel met een gemeenschappelijk eindpunt (zie figuur 5).

figuur 5



We kunnen nu uit de applet Omtrek3 concluderen:

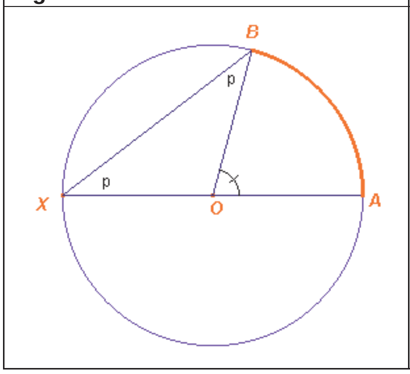
Stelling 2
Een omtrekshoek van een cirkel is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat.

Uiteraard moeten we deze stelling bewijzen; we zullen dat doen in Opdracht 4.

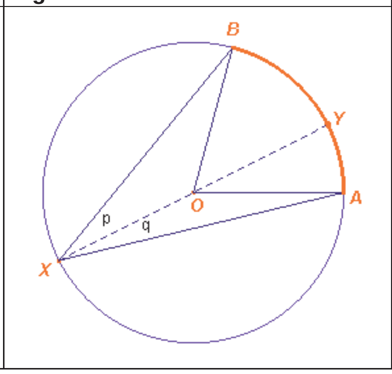
Opdracht 4

Ga na dat we te maken hebben met de volgende drie mogelijkheden; zie figuur 6.
Geval 1: het middelpunt *O* van de cirkel ligt op één van de benen van hoek *X*;
Geval 2: het punt *O* ligt binnen hoek *X*;
Geval 3: het punt *O* ligt buiten hoek *X*.

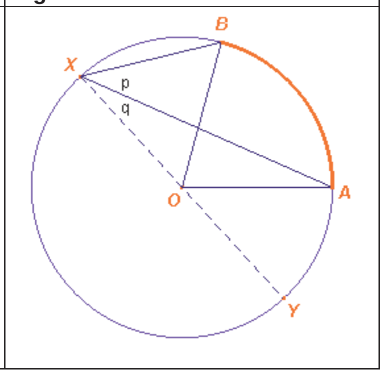
figuur 6a



figuur 6b



figuur 6c



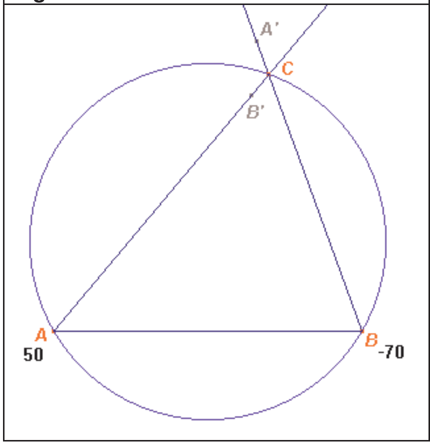
We bekijken eerst geval 1.
- Waarom is in figuur 6a $\angle AXB = \angle XBO = p$?
- Gebruik de stelling van de buitenhoek om hoek AOB in *p* uit te drukken.
- Druk nu ook bg(AB) uit in *p*.

Vervolgens geval 2. In figuur 6b is de lijn *XY* door het punt *O* getekend.
- Druk hoek *X* uit in *p* en *q* en gebruik vervolgens geval 1 om aan te tonen dat bg(BY) = $2p$.
- Druk vervolgens bg(AY) in *q* uit en formuleer je conclusie.
- Bewijs zelf geval 3 (zie figuur 6b), op min of meer dezelfde manier als geval 2.

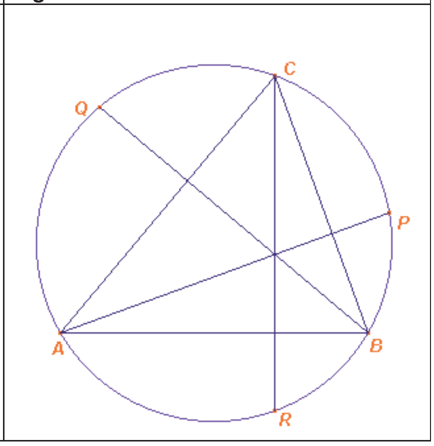
Opdracht 5 – Cabri's 'gradenboog'

Ook met Cabri kunnen we natuurlijk hoeken van willekeurige grootte tekenen.
Het meest voor de hand ligt daarbij de functie 'Rotatie' te gebruiken. Deze functie is te vinden in het *Afbeeldingen*-menu (het 6e menu van links).
De opdracht luidt: teken een driehoek *ABC* met opvolgend hoeken van 50°, 70° en 60°.
Het is uiteraard voldoende de hoeken van 50° (bij *A*) en 70° (bij *B*) te construeren, omdat dan 'automatisch' de derde hoek (bij *C*) gelijk is aan 60°.

figuur 7a



figuur 7b



- Teken op een nieuw Cabri-tekenblad een lijnstuk *AB* van voldoende lengte en plaats op het tekenblad met behulp van de functie 'Getallen' (of 'Wijzig getallen') de getallen 50 en **-70** (jawel, *min* 70). Zie figuur 7a.
- Kies nu de functie 'Rotatie' en roteer het punt *B* om *A* over de hoek van 50. Cabri vat bij een rotatie de getallen standaard op als graden.
  Selecteer *B*, dan *A* en vervolgens het getal 50. Dit geeft het punt *B'*. Teken de halve lijn *AB'*.
- Selecteer dan *A*, *B* en het getal -70 (in deze volgorde). Dit geeft het punt *A'*. Teken de halve lijn *BA'*.
- Ga na dat de hoek bij *C* inderdaad 60° is.

Verklaar waarom je bij *B* het getal -70 moet plaatsen en *niet* 70.

De omcirkel (omgeschreven cirkel) van driehoek *ABC* wordt door de punten *A*, *B*, *C* in drie cirkelbogen verdeeld.

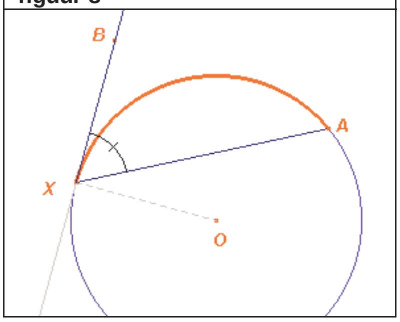
Bereken de bogen waarin deze punten de cirkel verdelen.

Opdracht 6

Bereken in de driehoek van Opdracht 5 de bogen waarin de hoogtelijnen *AP*, *BQ*, *CR* van driehoek *ABC* de omcirkel verdelen (zie figuur 7b).
Vermeld daarbij niet alleen de antwoorden, maar licht je berekeningen ook voldoende toe.

4. Raaklijn en omtrekshoek

figuur 8



Ook een raaklijn in een punt van de cirkel en een koorde naar dat punt vormen samen een omtrekshoek.
De boog binnen die hoek kunnen we eveneens berekenen.

Bekijk nu de CabriJava applet **Omtrek4**.

We kunnen hieruit concluderen:

Stelling 3
Een hoek X gevormd door een raaklijn in het punt X aan een cirkel en een koorde door X is gelijk aan de helft van de boog binnen die hoek.

Het bewijs van stelling 3 kan je geven in Opdracht 7.

Opdracht 7

Ook hier kunnen we weer drie gevallen onderscheiden.
Geval 1: het middelpunt *O* van de cirkel ligt op de koorde;
Geval 2: het punt *O* ligt binnen hoek *X*;
Geval 3: het punt O ligt buiten hoek *X*.

🗎 Maak met Cabri een tekening voor elk van deze drie gevallen en geef het bewijs. Lever je tekeningen bij het bewijs in.
Aanwijzing – Je kan, op dezelfde manier als in Opdracht 4, bij het bewijs van de gevallen 2 en 3 het resultaat van geval 1 gebruiken.

Opdracht 8

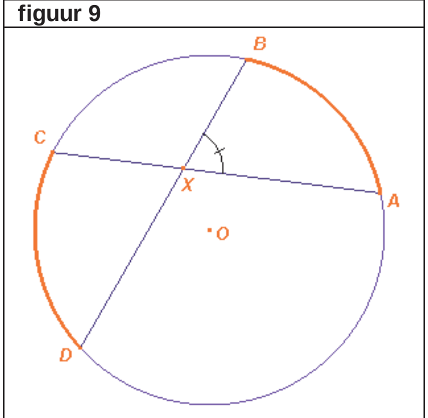
De punten *A*, *B*, *C* verdelen een cirkel in bogen die zich verhouden als 7, 10 en 13.
In die punten trekt men de raaklijnen aan de cirkel. Deze raaklijnen vormen een driehoek *PQR*.

- Maak allereerst een tekening met Cabri.

🗎 Bereken de hoeken van die driehoek. Lever de tekening samen met de berekening in.

5. Binnen- en buitenomtrekshoeken

figuur 9



In figuur 9 is hoek *X* een zogenoemde b i n n e n o m t r e k s h o e k van de cirkel met middelpunt *O* (het punt *X* ligt binnen de cirkel).
Een binnenomtrekshoek van een cirkel is dus een hoek gevormd door delen van twee koorden van die cirkel, waarvan het snijpunt binnen de cirkel ligt.

Er geldt:

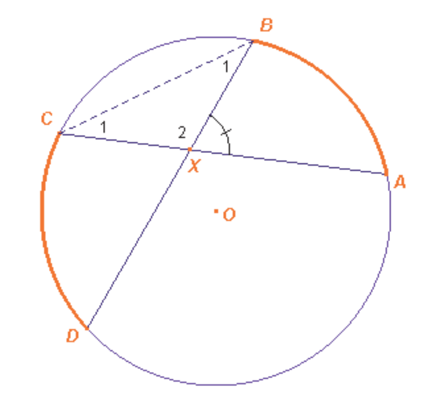
Stelling 4
Een binnenomtrekshoek is gelijk aan de halve som van de boog binnen die hoek en de boog binnen zijn overstaande hoek.

Dus in figuur 9 geldt: $\angle AXB = \frac{1}{2}(\text{bg } AB + \text{bg } CD)$.

Opdracht 9

Uiteraard is het ook nu de bedoeling stelling 4 te bewijzen.
Hierbij kan je gebruik maken van stelling 2 door een handige hulplijn te tekenen (zie het lijnstuk *BC* in figuur 10).

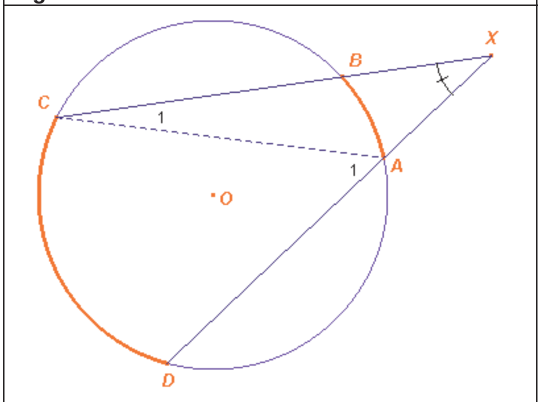
figuur 10



- Waarom geldt $\angle AXB = \angle B_1 + \angle C_1$?
  Aanwijzing – Wat voor soort hoek is $\angle AXB$ van driehoek *BCX*?
- Vul aan: $\angle B_1$ = … bg (…)
  Vul aan: $\angle C_1$ = … bg (…)
- Maak het bewijs nu verder af.

Definitie
Een b u i t e n o m t r e k s h o e k van een cirkel is een hoek die gevormd wordt door de dragers (verlengden) van twee koorden van die cirkel die elkaar buiten de cirkel snijden.

figuur 11



In figuur 11 is hoek *X* dus een buitenomtrekshoek van de cirkel met middelpunt *O*.

Er geldt:

Stelling 5
Een buitenomtrekshoek is gelijk aan het halve verschil van de bogen binnen die hoek.

In figuur 11 is dus: $\angle X$ **= ½ (bg *CD* – bg *AB*)**.

Opdracht 10

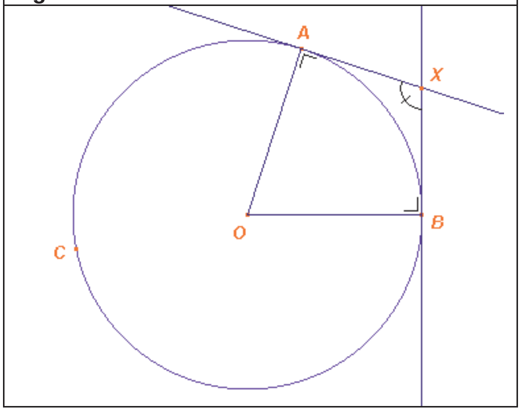
- Bewijs stelling 5.
  Aanwijzing – Zie figuur 11. Gebruik weer de stelling van de buitenhoek en stelling 2.

Opdracht 11

Ook als de twee lijnen raken aan een cirkel geldt voor de hoek tussen die raaklijnen dat deze gelijk is aan het halve verschil van de cirkelbogen binnen die hoek.

In figuur 12 raken de lijnen *XA* en *XB* opvolgend in *A* en *B* aan de cirkel met middelpunt *O*. We kunnen nu bewijzen, dat $\angle X$ = ½ (bg *ACB* – bg *AB*).

figuur 12



- Bekijk vierhoek *AOBX*. Vul nu aan:
  $\angle O + \angle X = \ldots°$
- Vul aan: $\angle O$ = bg …
  bg *ACB* = 360° – bg …
- Maak het bewijs nu zelf verder af.

Opdracht 12

Een cirkel raakt aan de benen van een hoek van 60°.

- Maak op basis van deze gegevens met Cabri een tekening.
  Aanwijzing – Teken eerst een hoek van 60° en de bissectrice van die hoek. Kies het punt *O* op deze bissectrice.
- Bereken de bogen waarin de cirkel door de raakpunten verdeeld wordt. Lever je tekening samen met de berekening in.