Een misvatting...

DICK KLINGENS (e-mail: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel (NL)
januari 2006

Bekend is, en zo niet zie bijvoorbeeld [1], dat het in het algemeen ***niet*** mogelijk is met passer en liniaal (verder afgekort tot: p&l) een hoek in drie gelijke delen te verdelen (al zijn er hoeken waarbij ***trisectie*** wél kan, zoals bij een hoek van 63° of bij een hoek van 90°; zie daarvoor [2] en [3]).

Zo nu en dan is er iemand die opmerkt dat een 'algemene' driedeling van een hoek ***wel*** mogelijk is door uit te gaan van een *gelijkbenige driehoek* waarvan de tophoek de te delen hoek is.

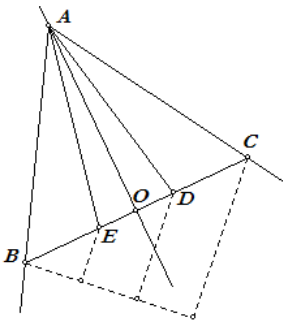

fig. 1

De vermeende 'constructiestappen' voor zo'n constructie zijn dan vaak iets als (zie figuur 1):

- Construeer de bissectrice van de hoek met hoekpunt A (dat is mogelijk met p&l).
- Kies een punt O op die bissectrice en bepaal de snijpunten B en C van de benen van de hoek met de loodlijn in O (construeerbaar met p&l) op die bissectrice.
- Verdeel het lijnstuk BC in drie gelijke stukken met deelpunten D en E (ook mogelijk met p&l).
- De lijnen DA en EA zijn dan (volgens die 'iemand') de trisectrices van hoek A.

Als dit een ***juiste*** constructie is, dan moet die natuurlijk ook opgaan voor een hoek van 90° !
We zullen hieronder laten zien dat dat echter ***niet*** het geval is.

We passen dus bovenstaande constructiestappen toe op een hoek van 90°; zie figuur 2.

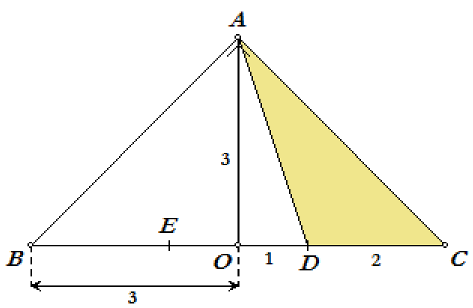

fig. 2

We stellen de lengte van de zijde BC - voor het gemak - gelijk aan 6.

In driehoek ODA is dan 'volgens Pythagoras':

$$AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

In driehoek ADC zijn nu twee hoeken en hun overstaande zijden bekend:

- $\angle DAC = \frac{1}{3}\angle A = 30°$ (althans ervan uitgaande dat de constructie juist is); voor de overstaande zijde DC van die hoek geldt: $DC = 2$, immers $DC = \frac{1}{3}BC$;
- $\angle DCA = 45°$; de overstaande zijde van die hoek is $AD = \sqrt{10}$.

We kijken vervolgens naar de *sinusregel* die uiteraard ook in driehoek ADC geldt:

$$\frac{DC}{\sin(DAC)} = \frac{AD}{\sin(DCA)}$$

Voor het linker lid van deze relatie vinden we dan:

$$\frac{DC}{\sin(DAC)} = \frac{2}{\sin 30°} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

en voor het rechter lid: $$\frac{AD}{\sin(DCA)} = \frac{\sqrt{10}}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 2\sqrt{5}$$

En direct is duidelijk dat de constructie ***niet juist*** kan zijn: 16 is nu eenmaal *ongelijk* aan 20.

Noten

[1] Dick Klingens (1999): *Over de trisectie van de hoek*. Op: *www.pandd.demon.nl/trisect.htm* (website van de auteur).

[2] Dick Klingens (2005): *Over de construeerbaarheid van gehele hoeken*. Op: *www.pandd.nl/analyse/constrhoeken.htm* (website van de auteur).

[3] Dick Klingens (2005): *Over de construeerbaarheid van gehele hoeken*. Niet gepubliceerd. Dit artikel is digitaal beschikbaar via: *www.pandd.nl/downloads/constrhoeken.pdf* (ca. 200 Kb).

Literatuur

- Benjamin Bold (1969): *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*. New York: Dover Publications (reprint 1982).
- Underwood Dudley (1987): *The Trisectors*. Washington: Mathematical Association of America (MAA); oorspronkelijke titel: *The Budget of Trisections* (Springer Verlag).
- Nicholas D. Kazarinoff (1970): *Ruler and the Round*. Mineola (NY, USA): Dover Publications (reprint 2003).