

Cabri werkblad

Meetkundige plaatsen

1. Wat is een meetkundige plaats?

We geven direct maar een

Definitie

Een meetkundige figuur heet **meetkundige plaats van punten met een bepaalde eigenschap** indien:

1. alle punten van de figuur die bedoelde eigenschap hebben;
2. alle punten met de eigenschap tot de figuur behoren.

Voorbeelden

[1] Een cirkel is de meetkundige plaats van de punten (X) die een *gegeven* afstand (r) tot een *vast* punt (M) hebben.

Notatie: $\{ X \mid XM = r \}$.

[2] De bissectrice van een hoek is de meetkundige plaats van de punten die *gelijke* afstand hebben tot de benen van die hoek.

Notatie $\{ X \mid d(X, a) = d(X, b) \}$, waarin a en b de benen van de hoek zijn en d de afstandsfunctie is van een punt tot een lijn.

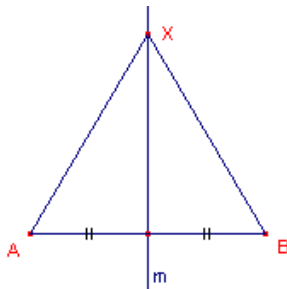
[einde Voorbeelden]

Opdracht 1

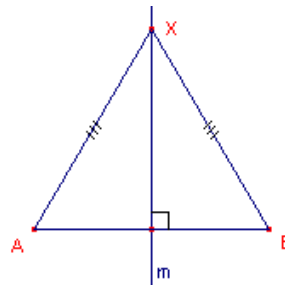
Een bekende meetkundige plaats is de **middelloodlijn** van een lijnstuk (AB). De middelloodlijn is namelijk de meetkundige plaats van de punten die *gelijke* afstand hebben tot de punten A en B .

Notatie $\{ X \mid XA = XB \}$.

figuur 1a



figuur 1b



Zoals uit de definitie blijkt moeten we, om de middelloodlijn als meetkundige plaats te mogen aanduiden, TWEE bewijzen geven:

1. alle punten op de middelloodlijn hebben de eigenschap (gelijke afstand);
2. alle punten met de eigenschap (gelijke afstand) liggen op de middelloodlijn.

We moeten dus de uitgangspunten voor het bewijs goed kiezen.

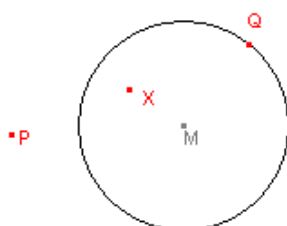
Om het bewijs voor *alle* punten te leveren volstaat het een bewijs te geven voor een *willekeurig* punt (X).

- a. We weten: Het punt X ligt op de middelloodlijn van het lijnstuk AB (zie figuur 1a).
Bewijs nu: $XA = XB$.
- b. We weten: Voor het punt X geldt $XA = XB$ (zie figuur 1b).
Bewijs nu: X ligt op de middelloodlijn van AB .
Aanwijzing
Teken de loodlijn uit X op AB en bewijs dat deze lijn door het midden van AB gaat.

2. Afhankelijkheid, onafhankelijkheid, pad, animatie

Opdracht 2

figuur 2



- Teken een punt P en een cirkel met middelpunt M (en een willekeurige straal). Zie figuur 2.
 - Teken het punt Q op de cirkel (met de functie "Punt op object" in het *Punt*-menu).
 - Construeer het midden X van het lijnstuk PQ (met de functie "Midden" in het *Constructie*-menu). Het is hierbij *niet* nodig eerst het lijnstuk PQ te tekenen.
- a. Verplaats het punt P.
Welke andere objecten veranderen hierdoor ook van positie?
 - b. Verplaats het punt Q.
Welke andere objecten veranderen nu ook van positie?
 - c. Vergroot en/of verklein de cirkel, cq. verplaats het punt M.
Welke andere objecten veranderen hierdoor van positie?
 - d. Is het mogelijk het punt X *direct* te verplaatsen?

Het punt X is afhankelijk van de ligging van de punten P en Q). Het punt Q is op zijn beurt weer afhankelijk van de cirkel met middelpunt M.

We zeggen: X is **afhankelijk** van P; X is afhankelijk van Q; X is afhankelijk van M; ...

P is een **onafhankelijk** punt; M is een onafhankelijk punt.

Q kan verplaatst worden op de cirkel. Hierdoor is Q afhankelijk van het object *waarop* het gedefinieerd is: de cirkel.

De cirkel wordt in dit geval ook wel het **pad** van het punt Q genoemd.

Deze eigenschap van Q, de *ligging* ervan op de cirkel (op een pad dus), kan in Cabri gebruikt worden voor de constructie van meetkundige plaatsen.

Nb. *Onafhankelijke punten kunnen daarvoor niet worden gebruikt.*

Er zijn drie methoden om meetkundige plaatsen op basis van een pad te onderzoeken.

Deze drie methodes komen aan de orde in Opdracht 3 in de paragraaf "3. Onderzoek".

3. Onderzoek

We gaan hierbij uit van de objecten zoals die in Opdracht 2 (en figuur 2) zijn besproken.

Opdracht 3

- a1. Verplaats het punt Q over de cirkel.
Let daarbij op de positie van het punt X.

Deze methode kan iets worden verfraaid door de verandering van de positie van het punt Q "automatisch" te laten geschieden.

Dit heet **Animatie**.

In het *Extra*-menu vinden we de functie "Animatie". Hiermee kan aan een object een "**animatieveer**" worden gekoppeld, waardoor het object beweegt over het bijbehorende pad.

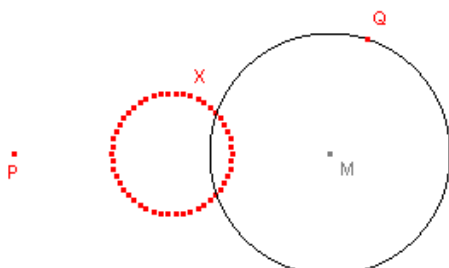
- a2. Kies de functie "Animatie" in het *Extra*-menu.
Selecteer het punt Q en houdt de linker muisknop ingedrukt. Sleep nu de muis. Hierdoor bepalen we de grootte van de animatieveer. De lengte van de veer bepaalt de snelheid van de verplaatsing van het punt Q over de cirkel.
Laat hierna de linker muisknop los.
De animatie kan worden gestopt door op het werkblad te klikken.

De methode die is behandeld in Opdracht 2, onderdeel a2, wordt meestal gecombineerd met de optie "Spoor aan/uit" die ook te vinden is in het *Extra*-menu.

Met "Spoor aan" kan het pad van een (afhankelijk) object worden getekend.

- b. Kies de functie "Spoor aan/uit" in het *Extra*-menu.
Selecteer daarmee het punt X.
Verplaats nu het punt Q, met of zonder Animatie, over de cirkel (zie figuur 3).

figuur 3



Opmerking

Het spoor van een object kan worden *uit* gezet door opnieuw de functie "Spoor aan/uit" te kiezen en het object te dé-selecteren (opnieuw aanklikken).

Een getekend spoor kan via het toetsenbord worden gewist met de toetscombinatie [Ctrl + F] of door met de muis te klikken op de rechter schuifknop van het tekenblad.

[einde Opmerking]

Bij de derde methode van onderzoek van een meetkundige plaats laten we de meetkundige plaats (het pad) van een object door Cabri "berekenen" en tekenen.

Hierbij wordt het pad van het afhankelijke object op het werkblad weergegeven met een vooraf ingesteld aantal punten. Het onafhankelijk punt (het punt Q in dit geval) wordt daarbij *niet* verplaatst.

- c. Kies de functie "Meetkundige plaats" in het *Constructie*-menu.
Selecteer nu het punt X (het punt waarvan de meetkundige plaats moet worden getekend).
Selecteer vervolgens het punt Q (het punt dat als basisobject voor de meetkundige plaats dient).
- d. Geef een zo volledig mogelijke beschrijving van de meetkundige plaats van het midden X van het lijnstuk PQ als Q de cirkel doorloopt.
Onder "zo volledig mogelijk" wordt hier verstaan: de ligging van het middelpunt van de meetkundige plaats en de grootte van de straal.

Opmerkingen

[1]

Cabri herkent de meetkundige plaats uit deze opdracht *niet* als een cirkel (wij wel?).

Op een door Cabri geconstrueerde meetkundige plaats kunnen met de functie "Punt op object" (in het *Punt*-menu) wel punten worden getekend.

Hiermee kan in voorkomende gevallen de meetkundige plaats door de gebruiker zelf worden geconstrueerd.

[2] **BELANGRIJK!**

De functie "Meetkundige plaats" in het *Constructie*-menu van Cabri werkt alleen als het object waarvan de meetkundige plaats moet worden getekend, afhankelijk is van een **punt op een pad**.

[einde Opmerkingen]

Opdracht 4

Lees allereerst Opmerking [1] aan het einde van Opdracht 3 nog eens.

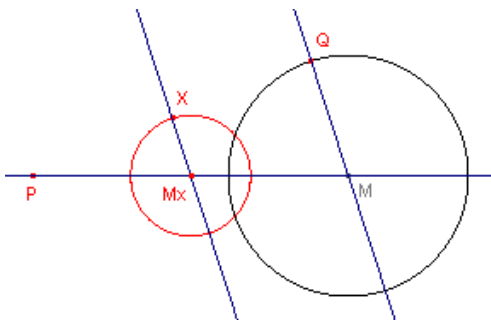
- Kies drie punten op de door Cabri getekende meetkundige plaats (met de functie "Punt op object").
- Construeer nu het middelpunt van de meetkundige plaats van het punt X.
- Construeer nu ook de cirkel zelf met de functie "Cirkel" in het *Cirkel*-menu.

Opdracht 5

Iemand anders heeft het middelpunt van de meetkundige plaats volgens het volgende voorschrift geconstrueerd:

- Teken de lijn door de punten P en M.
- Teken de lijn door de punten Q en M.
- Teken de lijn door X evenwijdig met de lijn QM.
- Bepaal M_x als snijpunt van de laatste lijn en de lijn PM (zie figuur 4).

figuur 4



☐ Is deze constructie juist?

Verklaar je antwoord. Ga onder andere na, dat bij verplaatsing van Q op de cirkel de lijn door X ook steeds door M_x gaat.

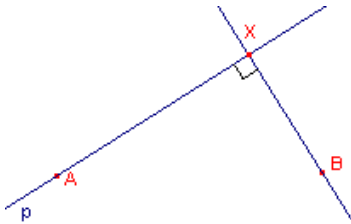
- Teken ook de lijn door P en Q.

☐ Bewijs nu dat de meetkundige plaats van de punten X de cirkel is met middelpunt M_x (het midden van PM) en waarvan de straal gelijk is aan de helft van de straal van cirkel M.

Opdracht 6

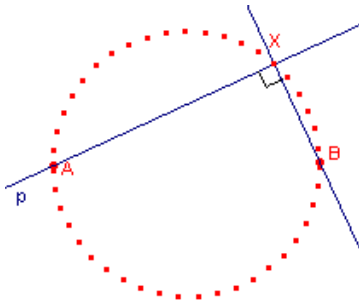
Lees allereerst Opmerking [2] aan het einde van Opdracht 3 nog eens.

figuur 5a

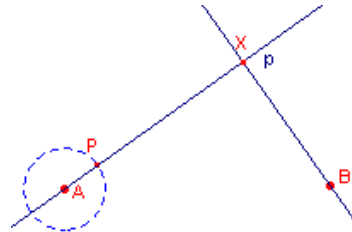


- Teken op een nieuw Cabri werkblad de punten A en B.
- Teken een lijn p door het punt A.
- Construeer de loodlijn uit B op de lijn p .
- Het voetpunt van de loodlijn is het punt X op de lijn p (zie figuur 5a).
- Zet het Spoor van het punt X aan.
- Draai nu de lijn p om het punt A. Dit gaat door de lijn te selecteren (deze lijn) en daarna met ingedrukte linker muisknop de lijn te slepen.

figuur 5b



figuur 5c



Opmerking

Je kan ook een animatieveer aan de lijn p koppelen met de functie "Animatie" in het *Extra*-menu.

[einde Opmerking]

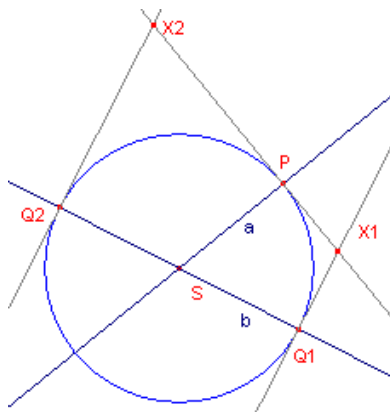
- Probeer ook de optie "Meetkundige plaats" uit het *Constructie*-menu. Klik op het punt X en daarna op de lijn p .
Waarom werkt deze optie niet?
- Kies een nieuw werkblad.
- Teken daarop het punt A en een (hulp)cirkel met middelpunt A.
- Teken het punt P op deze cirkel.
- Teken de lijn p door de punten A en P (zie figuur 5c).
Merk op, dat p nu niet meer direct kan worden gedraaid om het punt A. p is nu afhankelijk van het punt P.
- Teken ook het punt B en de loodlijn uit B op p met voetpunt X.
- Kies nu de functie "Meetkundige plaats" en klik op X en daarna op P.

☐ Geef nu een volledige beschrijving van de gevonden meetkundige plaats.

4. Samenstellende delen van een meetkundige plaats

Opdracht 7

figuur 6



- Teken op een nieuw Cabri werkblad twee elkaar in het punt S snijdende lijnen a en b .
- Kies het punt P op de lijn a .
- Teken de cirkel (S, SP) - middelpunt S, straal = SP.
De snijpunten van deze cirkel met de lijn b zijn de punten Q_1 en Q_2 .
- Teken ook de raaklijnen in de punten P, Q_1 en Q_2 aan de cirkel.
- Deze raaklijnen snijden elkaar in X_1 en X_2 (zie figuur 6).
- Construeer de meetkundige plaats van de punten X_1 en X_2 als P de lijn a doorloopt.

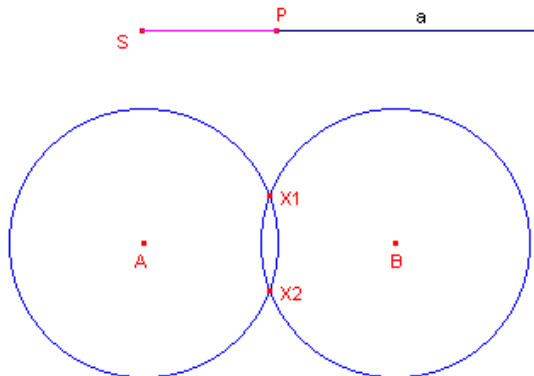
☐ Geef een volledige beschrijving van de gevonden meetkundige plaats.
Omschrijf de meetkundige plaats ook in woorden. Dus iets als "De meetkundige plaats van de punten die, wordt gevormd door".

Je hebt in Opdracht 7 gezien dat de meetkundige plaats uit twee (vier?) delen is opgebouwd.
Ook bij andere meetkundige plaatsen vind je soms een dergelijke opbouw.

Opdracht 8

- Teken op een nieuw werkblad een halve lijn a met eindpunt S.
- Kies het punt P op die halve lijn. Teken het lijnstuk SP.
- Teken vervolgens twee punten A en B.
- Kies de functie "Passer" in het *Constructie*-menu.
- Selecteer A en het lijnstuk PS.
- Selecteer B en het lijnstuk PS (zie figuur 7).

figuur 7



- Noem de snijpunten van beide cirkels X_1 en X_2 .
- Construeer de meetkundige plaats van de punten X_1 en X_2 .

☐ Tekent Cabri de volledige meetkundige plaats? Geef een korte toelichting bij je antwoord.
Gebruik ook de functie "Spoor" en verplaats P zelf.
Ontstaat er nu een betere weergave van de meetkundige plaats? Geef een korte toelichting bij je antwoord.