

Cabri werkblad

Loodrecht snijden

1. Definities

Allereerst de definitie voor de hoek tussen twee lijnen.

Definitie

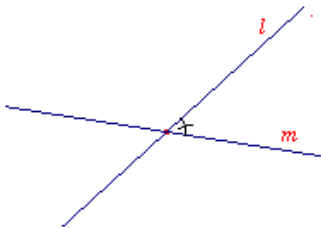
Als twee rechte lijnen elkaar snijden, dan verstaan we onder **de hoek tussen die twee lijnen** de *kleinste* hoek die wordt gevormd door die lijnen.

Staan de lijnen loodrecht op elkaar, dan is de kleinste hoek (ze zijn alle vier aan elkaar gelijk) dus 90° .

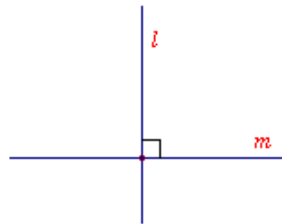
In dit geval spreken we van **loodrecht snijden** (zie figuur 1 en figuur 2).

Als de lijnen evenwijdig zijn of samenvallen, dan zeggen we wel dat de hoek 0° is.

figuur 1



figuur 2



Maar wat te doen als een lijn en een cirkel of twee cirkels elkaar snijden?
Kunnen we dan ook spreken van de hoek waaronder ze elkaar snijden?

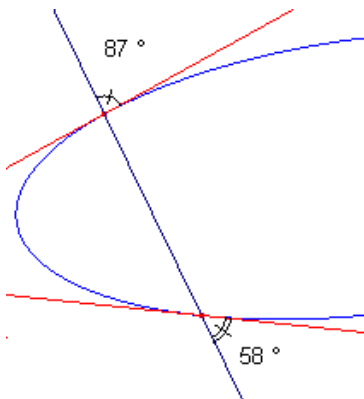
We geven een tweetal definities.

Definities

[1] Onder de **hoek tussen een rechte lijn en een kromme lijn** in een punt (een snijpunt van beide) verstaan we de hoek tussen die rechte lijn en de raaklijn in dat punt.

[2] Onder de **hoek tussen twee kromme lijnen** in een punt (een snijpunt van beide) verstaan we de hoek tussen de raaklijnen in dat punt aan de beide kromme lijnen.

figuur 3



Nb.

De beide laatste definities zeggen dus iets over de hoek tussen twee objecten **in een bepaald snijpunt**. In een ander snijpunt kan de hoek dus een andere waarde hebben (zie figuur 3).

2. Loodrecht snijdende cirkels

Opdracht 1

Gegeven is een cirkel met middelpunt O. Op deze cirkel ligt een punt A.

- a. Construeer een cirkel die de gegeven cirkel in A loodrecht snijdt.

Aanwijzing

De te construeren cirkel heeft de lijn OA als raaklijn.

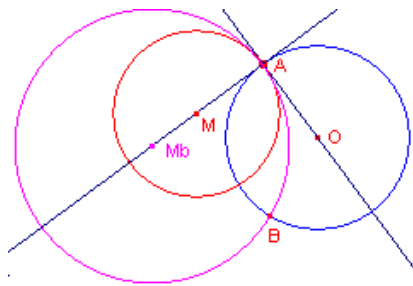
- b. Hoeveel cirkels door A zijn er die de gegeven cirkel in A loodrecht snijden?

- c. Kies een tweede punt B op cirkel O.

Construeer een cirkel die gaat door A en B en die de gegeven cirkel loodrecht snijdt in A.

d. Hoeveel van dergelijke cirkels zijn er?

figuur 4



Opdracht 2

De constructie in Opdracht 1c kan worden uitgevoerd met behulp van het begrip "meetkundige plaats".

De gezochte cirkel heeft namelijk twee eigenschappen:

A. de cirkel snijdt de gegeven cirkel loodrecht in het punt A;

B. de cirkel gaat door de punten A en B.

Vul de volgende beweringen aan:

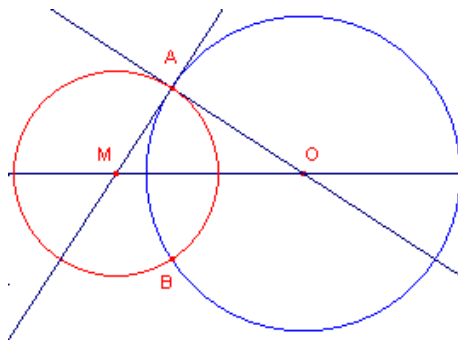
a. De meetkundige plaats van de cirkels die voldoen aan eigenschap A is

b. De meetkundige plaats van de cirkels die voldoen aan eigenschap B is

Conclusie

Het middelpunt van de gezochte cirkel is het snijpunt van de beide meetkundige plaatsen.

figuur 5



c. Toon aan, dat de cirkels elkaar ook in B loodrecht snijden.

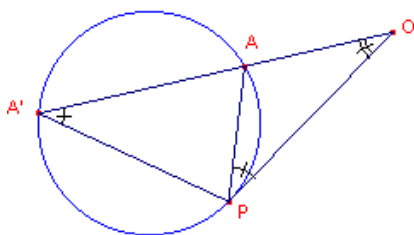
d. Ga ervan uit, dat het punt B nu *niet* op cirkel O ligt.

Ondergaat de constructie dan een wijziging? Geef een korte toelichting.

3. Interludium

Opdracht 3

figuur 6



In nevenstaande figuur is OP raaklijn aan de cirkel.

A is een willekeurig punt van de cirkel.

A' is het tweede snijpunt van OA met de cirkel.

a. Waarom is hoek OPA gelijk aan hoek OA'P?

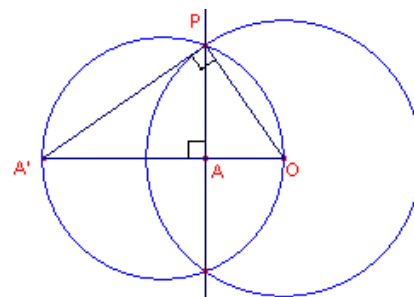
b. Bewijs, dat $OA \cdot OA' = OP^2$.

Aanwijzing

Gebruik twee gelijkvormige driehoeken.

Opdracht 4

figuur 7



In nevenstaande figuur wordt de cirkel O met straal r door

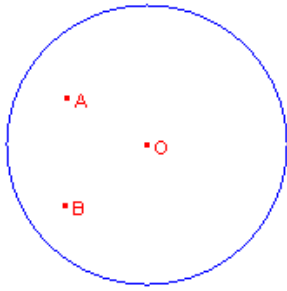
een tweede cirkel in het punt P loodrecht gesneden.

A is het voetpunt van P op de lijn OA'.

□ Bewijs, dat $OA \cdot OA' = r^2$.

4. Verder onderzoek

figuur 8a



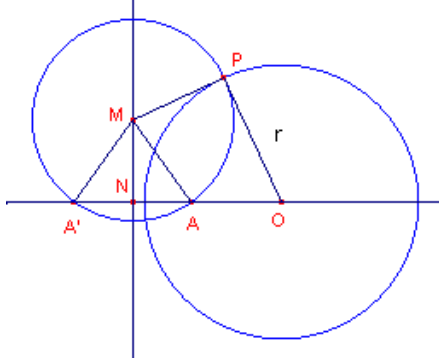
De punten A en B liggen nu beide binnen de cirkel met middelpunt O (zie figuur 8a).

Ook in dit geval willen we een cirkel construeren door A en B die de gegeven cirkel loodrecht snijdt (we doen dat in Opdracht 6).

Opdracht 5

Kijk eerst echter naar figuur 8b.

figuur 8b



Hierin snijden de cirkels O en M elkaar loodrecht (in het punt P).

A ligt op cirkel M.

De lijn OA snijdt cirkel M verder in A'.

N is het voetpunt van M op OA.

- Waarom is N het midden van AA'?
- Als r de straal is van cirkel O, bewijs dan dat

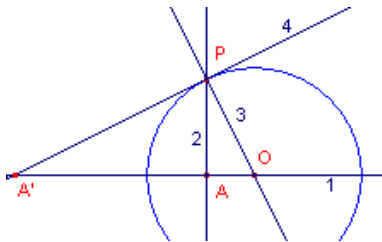
$$OA \cdot OA' = r^2.$$

- Op welke lijn ligt het middelpunt M van de loodrecht snijdende cirkel?

We kunnen een loodrecht snijdende cirkel door A dus construeren als we in staat zijn bij de gegeven cirkel met middelpunt O en gegeven punt A het punt A' te bepalen.

Methode 1

figuur 9



- Teken de lijn door O en A.
- Teken de loodlijn in A op OA. Het snijpunt met de cirkel is P.
- Teken OP.
- Teken de loodlijn in P op OP.
- Teken het punt A' als snijpunt van OA en deze loodlijn.

☐ Geef aan waarom deze constructie het gewenste punt A' oplevert.

Methode 2, met inversie

Cabri heeft een functie waarmee het punt A' op basis van methode 1 onmiddellijk geconstrueerd kan worden. Deze functie bevindt zich in het *Afbeeldingen*-menu en heeft de naam "**Inversie**".

- Kies de functie Inversie in het *Afbeeldingen*-menu.
- Selecteer het punt A en daarna de cirkel.

Hierna construeert Cabri het punt A'.

Dit punt wordt ook wel de **inverse** (het inverse punt) van A ten opzichte van de cirkel genoemd.

Opmerking

Deze constructie werkt ook als het punt A *buiten* de cirkel ligt. A' ligt dan binnen de cirkel.

[einde Opmerking]

5. Tenslotte

We kondigden de volgende opdracht al aan in de vorige paragraaf. In Opdracht 5 is al enig vooronderzoek met betrekking tot Opdracht 6 gepleegd.

Opdracht 6

Gegeven is een cirkel met middelpunt O.

De punten A en B liggen binnen deze cirkel (zie figuur 8a).

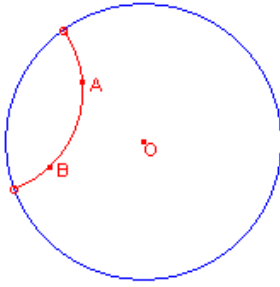
- Construeer de cirkel door de punten A en B die de gegeven cirkel loodrecht snijdt.

Aanwijzing

Construeer de inverse punten van A en B ten opzichte van de cirkel.

Opdracht 7 (facultatief)

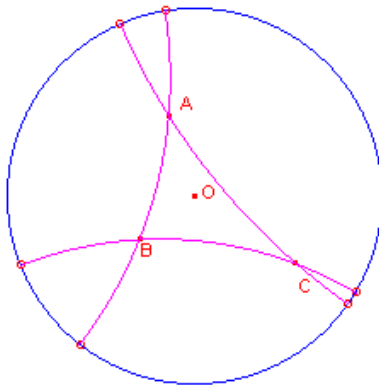
figuur 10



Gegeven is een cirkel met middelpunt O.
De punten A en B liggen binnen deze cirkel.

- Construeer een cirkelboog door de punten A en B waarvan de "drager" (dat is dus een cirkel) de gegeven cirkel loodrecht snijdt.
We zeggen nu ook wel dat boog AB en cirkel O elkaar loodrecht snijden.
- Definieer een macro:**d-lijn** die, uitgaande van de punten A, B en de cirkel (beginobjecten), de bedoelde boog (eindobject) door A en B construeert.
- Wat is er aan de hand met de boog als A en B op een middellijn van de cirkel liggen?
Waar ligt in dit geval het "middelpunt" van de boog?
- Werkt de door jou gedefinieerde macro ook als de beide punten *op* de gegeven cirkel liggen?
Indien dat niet zo is, ga dan na waarom niet.
Probeer in dit geval de macro zo te definiëren, dat de boog ook wordt getekend als de beide punten *op* de cirkel liggen.

figuur 11



Driehoek ABC in het Poincaré-model

Opmerking

Bovenstaande constructie van boog AB kan worden gebruikt in het **Poincaré-model** van de **hyperbolische** meetkunde.

De naam **d-lijn** voor de boog geeft aan, dat de boog een lijn is op een **disk** (het deel van het vlak binnen de cirkel).

Voor een leerlingentekst zie bijvoorbeeld:

Moderne Wiskunde - vwo bovenbouw - B2/deel 1, pg. 211-215,
Wolters-Noordhoff, Groningen, 1999.

[einde Opmerking]