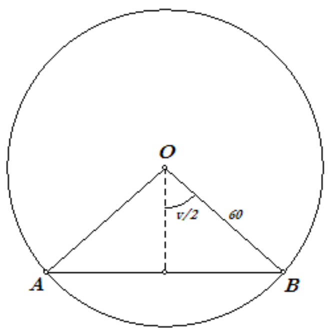
Goniometrie volgens Ptolemaeus

DICK KLINGENS (e-mail: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel
juni 2007

1. Koordentabel

Ptolemaeus (*Klaudios Ptolemaios*, ca. 65-165, Alexandrië) hield zich voornamelijk bezig met astronomie, maar ook met geografie, cartografie, muziek en met optica; hij was meer een toegepast wiskundige, dan een theoreticus. Bij zijn astronomische berekeningen maakte hij gebruik van een zogenoemde *koordentabel* (Gr.: Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειων; uitspraak: kanónion toon en kúklooi ui-theioon; vertaling: richtsnoer [voor de berekening] van koorden in een cirkel).
Die tabel bevat de lengtes van koorden in een cirkel met een middellijn met vaste lengte 120 als functie (*krd*) van de middelpuntshoek *v* (in graden) op die koorden. De middelpuntshoeken lopen in de koordentabel met stappen van ½° op van ½° tot 180°.



In moderne notatie luidt de bedoelde functie:

$$\mathrm{krd}(v) = \mathrm{krd}(\mathrm{bg}(AB)) = 120 \sin \tfrac{v}{2}$$

De lengte van de koorden wordt daarbij door Ptolemaeus uitgedrukt in gehele delen (*p*) en in een decimaal deel, dat echter geschreven is in het 60-tallig stelsel (minuten en seconden).
Zo is: $\mathrm{krd}(90°) = \sqrt{2 \cdot 60^2} \approx 84{,}85281374 \approx 84^p 51'10''$

Opmerking. Nu is, terugrekenend: $84^p 51'10'' = 84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{3600} \approx 84{,}85277778$. We zien dus een redelijk grote nauwkeurigheid. Overigens bevat Ptolemaeus' koordentabel ook de gemiddelde toename tussen opeenvolgende lengtes van de koorden (zestigsten) waardoor het mogelijk is tussen twee van de berekende waarden te interpoleren. ♦

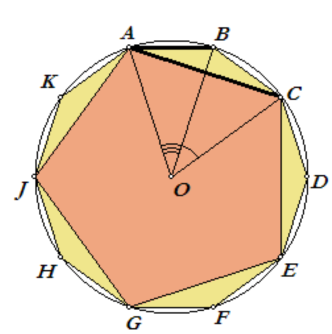
In het dertiendelige boek over de astronomie, de *Almagest*[1], waarin Ptolemaeus zijn koordentabel publiceerde, beschrijft hij ook (in deel I) hoe de waarden in de tabel zijn berekend. We zullen dat hieronder ook doen, waarbij we de *Almagest* enigszins (en af en toe in vrije vertaling) zullen volgen.

2. Berekening van z_{10} en z_5

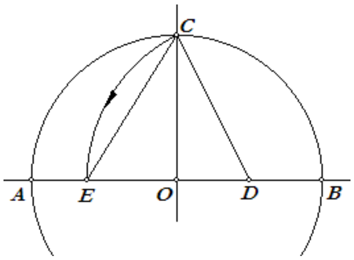
Na te hebben opgemerkt dat de omtrek van de cirkel in 360 gelijke delen (graden) wordt verdeeld, en dat de middellijn van de cirkel een vaste lengte 120 heeft, geeft Ptolemaeus eerst een antwoord op de (moderne) vraag hoe groot sin 18° is, en hoe groot sin 36°; met andere woorden hij berekent:

$$\mathrm{krd}(36°) \quad \text{en} \quad \mathrm{krd}(72°)$$

In de figuur hiernaast is AB = krd(36°) en AC = krd(72°).



Daartoe gebruikt Ptolemaeus twee stellingen uit Euclides' *Elementen* (hier verder aangegeven met **Elem.**) die een verband leggen tussen de zijde z_{10} van de regelmatige tienhoek en de zijde z_5 van de regelmatige vijfhoek.
Hij geeft eerst een eenvoudige constructie van z_{10} en z_5.



Is AB de middellijn van de cirkel (O) en $OC = R$ de straal loodrecht op AB. Verdeel OB via het punt D in twee gelijke stukken en meet DE, gelijk aan DC, af langs DA. Verbind E met C.
Dan is:

- *OE de zijde van een ingeschreven regelmatige tienhoek, en*
- *EC de zijde van een ingeschreven regelmatige vijfhoek.*

Want, omdat D het midden is van OB:

$$DE^2 = (BE - \tfrac{1}{2}R)(OE + \tfrac{1}{2}R) = BE \cdot OE + \tfrac{1}{2}R(BE - OE) - \tfrac{1}{4}R^2$$
$$DE^2 = BE \cdot OE + \tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{4}R^2 = BE \cdot OE + (\tfrac{1}{2}R)^2$$

zodat $$DC^2 = DE^2 = BE \cdot OE + OD^2$$
Maar ook: $$DC^2 = OC^2 + OD^2$$
En dus: $$BE \cdot OE = OC^2 = OB^2 \quad \text{of} \quad OE : OB = OB : BE$$
Het lijnstuk BE wordt dus door het punt D in uiterste en middelste reden verdeeld.
Volgens **Elem.** XIII, 9 [2] is nu OE de zijde van een regelmatige tienhoek die in (O) beschreven kan worden, omdat OB de zijde is van een regelmatige zeshoek in diezelfde cirkel.
Volgens **Elem.** XIII,10 [3] hebben we:

$$(z_5)^2 = (z_6)^2 + (z_{10})^2$$

En we weten dat: $$EC^2 = CO^2 + OE^2$$
En daaruit blijkt dat EC de zijde is van een regelmatige vijfhoek die in cirkel (O) beschreven kan worden. ♦

Opmerking. Een korter, en wellicht iets meer voor de hand liggend en zeker moderner, bewijs van het bovenstaande vinden we door *berekening* (en dan in ons 10-tallig stelsel).
Stel $OB = OC = R = 1$. Dan is: $OD = \frac{1}{2}$. Zodat:

$$DE^2 = DC^2 = DO^2 + CO^2 = \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{5}{4}$$

En dan is: $$OE = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$
en: $$BE = BD + DE = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}$$
met: $$BE \cdot OE = (\tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{4} = 1 = OB^2$$ ♦

Zodat: $$z_{10} = OE = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$
en: $$z_5 = EC = \sqrt{CO^2 + OE^2} = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Ptolemaeus gebruikt deze wortels evenwel niet. Hij berekent de lengtes van z_{10} en z_5 direct in delen van de lengte van de middellijn van de cirkel. Zo vindt hij:

$$\text{krd}(36°) = z_{10} = 30(\sqrt{5} - 1) = 37^{p}4'55''$$
$$\text{krd}(72°) = z_5 = 30\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 70^{p}32'3''$$

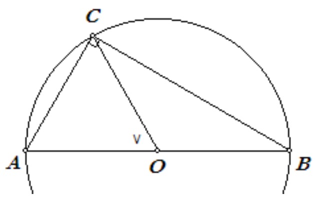
Daarna geeft hij de zijden van andere regelmatige ingeschreven veelhoeken, nl. de zeshoek, het vierkant en de gelijkzijdige driehoek:

$$\text{krd}(60°) = 60^p$$
$$\text{krd}(90°) = \sqrt{2 \cdot 60^2} = \sqrt{7200} = 84^p 51'10''$$
$$\text{krd}(120°) = \sqrt{3 \cdot 60^2} = \sqrt{10800} = 103^p 55'23''$$

3. $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

Vervolgens merkt Ptolemaeus op dat:

$$\text{krd}^2(v) + \text{krd}^2(180° - v) = 120^2 \qquad (3.1)$$



Hij kende natuurlijk de stellingen van Thales en Pythagoras.
Wij herkennen in formule (3.1) 'onze' goniometrische variant van de stelling van Pythagoras:

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Op basis van (3.1) is het mogelijk krd(108°) te berekenen uit krd(72°), krd(144°) uit krd(36°), enzovoorts.

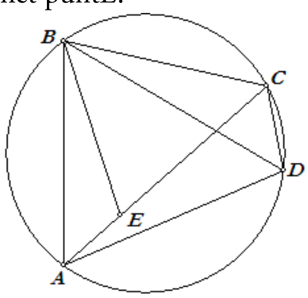
Om uit krd(72°) en krd(60°) de waarde van krd(12°) te berekenen heeft hij ook een formule nodig; zoiets als onze: $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$
Die formule leidt hij af via de stelling die zijn naam draagt: de *Stelling van Ptolemaeus*. Deze stelling komt in de moderne leerboeken over de vlakke meetkunde wel voor, maar er staat dan meestal niet bij waarvoor de stelling in eerste instantie gebruikt is.

4. Stelling van Ptolemaeus

Stelling 1 (Stelling van Ptolemaeus). Gegeven de vierhoek *ABCD*, beschreven in een cirkel, met diagonalen *AC*, *BD*. Te bewijzen dat:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

Bewijs. Teken *BE* zó, dat hoek *ABE* gelijk is aan hoek *DBC* en laten *BE* en *AC* elkaar snijden in het punt*E*.



Dan zijn de driehoeken *ABE*, *DBC gelijkhoekig*, zodat:

$$AB : AE = BD : DC$$

of: $$AB \cdot DC = AE \cdot BD \qquad (4.1)$$

Tel dan bij elk van de gelijke hoeken *ABE*, *DBC* de hoek *EBC*, dan is hoek *ABD* gelijk aan hoek *EBC*; en de driehoeken *ABD* en *RBC* zijn gelijkhoekig.

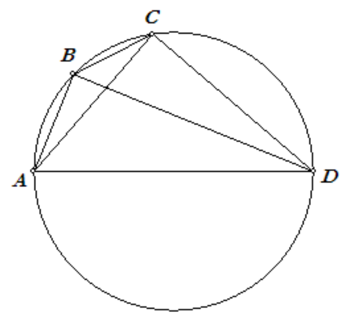
Zodat: $$BC : CE = BD : DA$$

of: $$AD \cdot BC = CE \cdot BD \qquad (4.2)$$

Door (4.1) en (4.2) bij elkaar op te tellen vinden we:

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD \qquad \blacklozenge$$

Zijn dan *AB*, *AC* twee *bogen* met beginpunt *A*, *AD* de middellijn van de cirkel en zij bg(*AC*) = α groter dan bg(*AB*) = β.



Stel nu verder dat krd(α) en krd(β) gegeven zijn; we moeten nu krd(bg(BC)), de koorde op boog BC, trachten te vinden.
Verbind B met D en C met D.
Dan is, volgens Stelling 1:

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$$

Nu zijn AB, AC gegeven. Dan zijn BD = krd(180° – β) en CD = krd(180° – α) bekend. En AD is ook bekend. Dus is de 'resterende' koorde BC bekend. ♦

Dit geeft dan de formule:

$$\text{krd}(\alpha - \beta) \cdot \text{krd}(180°) = \text{krd}(\alpha) \cdot \text{krd}(180° - \beta) - \text{krd}(\beta) \cdot \text{krd}(180° - \alpha) \qquad (4.3)$$

En deze formule is equivalent met:

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

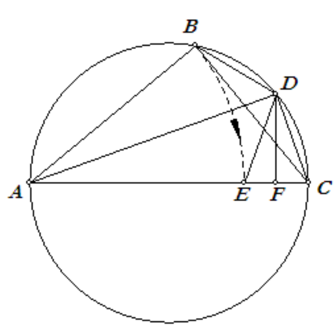
waarin $\alpha = 2a$ en $\beta = 2b$.
En door gebruik te maken van (4.3) vindt Ptolemaeus dan:

$$\text{krd}(12°) = \text{krd}(72° - 60°) = 12^p32'36''$$

5. $\sin^2 ½v = ½(1 - \cos v)$

Om koorden van kleinere hoeken te vinden is een formule nodig waarmee de koorde op de helft van een gegeven boog kan worden afgeleid.
Daartoe leidt Ptolemaeus een formule af die equivalent is met $\sin^2 \tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{2}(1 - \cos v)$.

Zij BC een boog van een cirkel met middellijn AC en wordt de boog BC door het punt D in twee gelijke delen verdeeld. Dan willen we krd(DC) [4] bij gegeven krd(BC) vinden.



Teken DF loodrecht op AC en teken ook AB, AD, BD, DC. Pas AE gelijk aan AB af op AC en verbind D met E.

Dan zal FC gelijk zijn aan EF, of FC zal de helft zijn van het verschil van AC en AB.

De driehoeken ABD en AED zijn in alle opzichten aan elkaar gelijk [congruent; dk], want twee zijden van de ene zijn gelijk aan twee zijden van de andere en de ingesloten hoeken BAD, EAD, die staan op gelijke bogen, zijn gelijk.

Zodat: $ED = BD = DC$
Dan zijn de rechthoekige driehoeken DEF, DCF in alle opzichten gelijk, dus $EF = FC$,
of: $CF = ½(AC - AB)$ ♦

Nu is: $AC \cdot CF = CD^2$
En hieruit concludeert Ptolemaeus:

$$\begin{aligned}\text{krd}^2(CD) &= \tfrac{1}{2}AC(AC - AB)\\ &= \tfrac{1}{2}\text{krd}(180°)\cdot\big(\text{krd}(180°) - \text{krd}(180° - \text{bg}(BC))\big)\end{aligned}$$

En dit is inderdaad equivalent met: $\sin^2 \tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{2}(1 - \cos v)$.

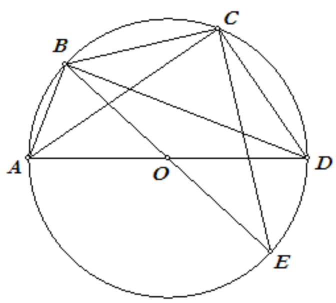
Door deze formule herhaaldelijk toe te passen vindt Ptolemaeus krd(6°), krd(3°) en tenslotte ook krd(1½°) = $1^p34'15''$ en krd(¾°) = $0^p47'8''$.

Om een tabel te kunnen maken die met halve graden oploopt, is echter ook de waarde van krd(1°), liggend tussen krd(1½°) en krd(¾°), nodig, alsmede een formule (een optellingsformule) waarmee het mogelijk is bij een gegeven krd(v) de waarde van krd(v + ½°) te berekenen.

6. cos(u + v) = cos u · cos v – sin u · sin v

De optellingsformule leidt Ptolemaeus weer af uit 'zijn' stelling.

Stel dat AD een middellijn is van een cirkel, en AB en BC zijn twee koorden. Dan moeten we bij gegeven krd(AB) en krd(BC) de waarde van krd(AC) trachten te bepalen.
Teken dan de middellijn BOE en de lijnstukken CE, CD, DE, BD.



Nu is, omdat krd(AB) bekend is, ook krd(BD) bekend, en dus ook krd(DE) die gelijk is aan krd(AB); en omdat krd(BC) bekend is, is krd(CE) bekend.
Volgens Stelling 1 is dan:

$$BD \cdot CE = BC \cdot DE + BE \cdot CD$$

De middellijn BE en alle koorden in deze vergelijking, met uitzondering van CD, zijn bekend.
We kunnen dan CD = krd(180° – bg(AC)) berekenen.

We hebben:

$$\begin{aligned}&\mathrm{krd}(180°)\cdot\mathrm{krd}\big(180°-\mathrm{bg}(AC)\big)=\\&\qquad=\mathrm{krd}\big(180°-\mathrm{bg}(AB)\big)\cdot\mathrm{krd}\big(180°-\mathrm{bg}(BC)\big)-\mathrm{krd}(AB)\cdot\mathrm{krd}(BC)\end{aligned}$$

Dus: krd(180° – bg(AC)), en daarmee ook krd(AC), is bekend.

Voor bg(AB) = $2u$ en bg(BC) = $2v$ is dit resultaat equivalent met:

$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

De belangrijkste stap hierna is het berekenen van krd(1°). Ptolemaeus doet dat via een ingenieuze interpolatie tussen krd(1½°) en krd(¾°). Die interpolatiemethode staat bekend als de *ongelijkheid van Aristarchus*.

7. Ongelijkheid van Aristarchus

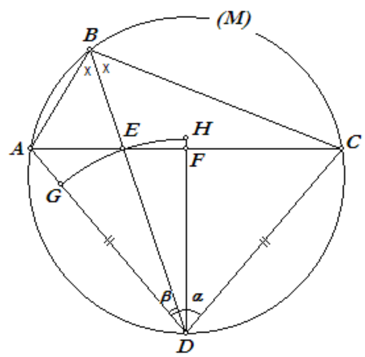
Stelling 2. *Is de lengte van een koorde in een cirkel groter dan de lengte van een tweede koorde in die cirkel, dan is de verhouding van die lengtes* (*in deze volgorde*) *kleiner dan de verhouding van de lengtes van de cirkelbogen waarop die koorden staan.*
(*Aristarchus van Samos,* ca. 310-230 v. Chr.)

Of (zie onderstaande figuur):

voor $CB > AB$ geldt dat $CB : AB$ < bg(CB) *:* bg(AB)

In het hierna staande bewijs volgen we min of meer het bewijs van Ptolemaeus zelf.

Bewijs. A, B, C zijn willekeurige punten op een gegeven cirkel (M), echter zó gelegen, dat $CB > AB$.



Zij BD de bissectrice van hoek ABC, waarbij E het snijpunt is met AC. De bogen AD, DC zijn dan gelijk, en daarmee ook de koorden AD, DC.
Omdat $CB : AB = CE : AE$ (*bissectricestelling*), is $AE < CE$.
Teken dan DF loodrecht op AC.
Omdat $DA > DE > DF$, snijdt de cirkel (D, DE) het lijnstuk DA in G en het verlengde van DF in H.
Nu is [5]:

$$FE : EA = Ғ(FED) : Ғ(EAD) < \text{sector}(HED) : \text{sector}(GED)$$

en dan ook: $FE : EA < \angle FDE : \angle EDA$

Componendo [6]: $FA : AE < \angle FDA : \angle EDA$

En na verdubbeling van de eerste leden is:

$$CA : AE < \angle CDA : \angle EDA$$

En, separando [6]: $CE : AE < \angle CDE : \angle EDA$

Wegens $CB : AB = CE : AE$ is dan:

$$CB : AB < \angle CDB : \angle BDA$$

of: $CB : AB < \text{bg}(CB) : \text{bg}(BA)$ ♦

Opmerking. Dit is uiteraard equivalent met (in moderne notatie):

$$\sin\alpha : \sin\beta < \alpha : \beta$$

waarbij $CDB = \alpha$ en $BDA = \beta$ (met $\frac{1}{2}\pi > \alpha > \beta$). ♦

Ptolemaeus leidt dan uit Stelling 2 af dat:
- $\text{krd}(1°) : \text{krd}(\frac{3}{4}°) < 1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} : 1$;
- $\text{krd}(1\frac{1}{2}°) : \text{krd}(1°) < 1\frac{1}{2} : 1 = 1 : \frac{2}{3}$.

En vervolgens: $$\tfrac{4}{3} \cdot \text{krd}(\tfrac{3}{4}°) > \text{krd}(1°) > \tfrac{2}{3} \cdot \text{krd}(1\tfrac{1}{2}°) \qquad (7.1)$$

Nu is $\text{krd}(\frac{3}{4}°) = 0^p47'8''$, zodat:

$$\tfrac{4}{3} \cdot \text{krd}(\tfrac{3}{4}°) = 1^p2'50''$$

en $\text{krd}(1\frac{1}{2}°) = 1^p34'15''$, zodat:

$$\tfrac{2}{3} \cdot \text{krd}(1\tfrac{1}{2}°) = 1^p2'50''$$

En hieruit blijkt dan, vanwege het 'inklemmen' in (7.1), dat:

$$\text{krd}(1°) = 1^p2'50''$$

En tenslotte ook: $$\text{krd}(\tfrac{1}{2}°) = 0^p31'25''$$

En *dan* is Ptolemaeus in staat een koordentabel te maken voor bogen (middelpuntshoeken) van ½° tot 180° met stappen van ½°; deze tabel komt overeen met een (moderne, maar bij ons in onbruik geraakte) *sinustabel* voor hoeken van ¼° tot 90° met stappen van ¼°.

8. De tabel

Het eerste gedeelte van de Ptolemaeus' koordentabel ziet er als volgt uit:

Hoek (in °)	Koorde	Zestigste
½	$0^p31'25''$	$0^p1'2''50'''$
1	$1^p\ 2'50''$	$0^p1'2''50'''$
1 ½	$1^p34'15''$	$0^p1'2''50'''$
2	$2^p\ 5'40''$	$0^p1'2''50'''$
2 ½	$2^p37'\ 4''$	$0^p1'2''48'''$
3	$3^p\ 8'28''$	$0^p1'2''48'''$

Hoek (in °)	Koorde	Zestigste
10 ½	$10^p58'49''$	$0^p1'2''33'''$
11	$11^p30'\ 5''$	$0^p1'2''32'''$
11 ½	$12^p\ 1'21''$	$0^p1'2''30'''$
12	$12^p32'36''$	$0^p1'2''28'''$
12 ½	$13^p\ 3'50''$	$0^p1'2''27'''$
13	$13^p35'\ 4''$	$0^p1'2''25'''$

Hoek (in °)	Koorde	Zestigste
3 ½	$3^p38'52''$	$0^p1'2''48'''$
4	$4^p11'16''$	$0^p1'2''48'''$
4 ½	$4^p42'40''$	$0^p1'2''47'''$
5	$5^p14'\ 4''$	$0^p1'2''47'''$
5 ½	$5^p45'27''$	$0^p1'2''46'''$
6	$6^p16'49''$	$0^p1'2''45'''$
6 ½	$6^p48'11''$	$0^p1'2''43'''$
7	$7^p19'33''$	$0^p1'2''42'''$
7 ½	$7^p50'54''$	$0^p1'2''41'''$
8	$8^p22'15''$	$0^p1'2''40'''$
8 ½	$8^p53'35''$	$0^p1'2''39'''$
9	$9^p24'51''$	$0^p1'2''38'''$
9 ½	$9^p56'13''$	$0^p1'2''37'''$
10	$10^p27'32''$	$0^p1'2''35'''$

Hoek (in °)	Koorde	Zestigste
13 ½	$14^p\ 6'16''$	$0^p1'2''23'''$
14	$14^p37'27''$	$0^p1'2''21'''$
14 ½	$15^p\ 8'38''$	$0^p1'2''19'''$
15	$15^p39'47''$	$0^p1'2''17'''$
15 ½	$16^p10'56''$	$0^p1'2''15'''$
16	$16^p42'\ 3''$	$0^p1'2''13'''$
16 ½	$17^p13'19''$	$0^p1'2''10'''$
17	$17^p44'14''$	$0^p1'2''\ 7'''$
17 ½	$18^p15'17''$	$0^p1'2''\ 5'''$
18	$18^p46'19''$	$0^p1'2''\ 2'''$
18 ½	$19^p17'21''$	$0^p1'2''\ 0'''$
19	$19^p48'21''$	$0^p1'1''57'''$
19 ½	$20^p19'19''$	$0^p1'1''54'''$
20	$20^p50'16''$	$0^p1'1''51'''$

Nog een korte toelichting bij de kolom 'Zestigste' (Gr: ἑξηκοστῶν; uitspraak: hèxèkostoon). Deze kolom bevat $\frac{1}{30}$ van het verschil tussen de lengte van de koorde en die van de koorde die er in de tabel aan vooraf gaat.

Voorbeeld. Uit de tabel blijkt: krd(2½°) = $2^p37'04''$ en krd(2°) = $2^p05'40''$.
Het verschil van beide is dan $0^p31'24''$. En $\frac{1}{30}$ daarvan is: $0^p1'2''48'''$.
Als we dan bijvoorbeeld krd(2°25') willen weten, dan berekenen we:

- $2^p05'40 + 25 \cdot (0^p1'2''48''') = 2^p31'50''$, of
- $2^p37'04'' - 5 \cdot (0^p1'2''48''') = 2^p31'50''$.

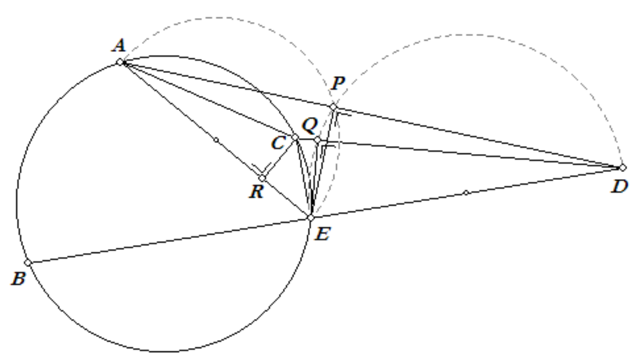
Enkele bijzondere, ons bekende, waarden die uit de tabel volgen, zijn:

- $\sqrt{2} = \frac{2}{120}\,\mathrm{krd}(90°) = \frac{1}{60}(84^p51'10'') = 1^p24'51'' \approx 1{,}414166667$, terwijl de werkelijke waarde in 9 decimalen gelijk is aan 1,414213562.
- $\sqrt{3} = \frac{2}{120}\,\mathrm{krd}(120°) = \frac{1}{60}(103^p55'23'') = 1^p43'55'' \approx 1{,}732050926$, waarbij de werkelijke waarde, ook weer in 9 decimalen, gelijk is aan 1,732050808.
- $\pi \approx \frac{360}{120}\,\mathrm{krd}(1°) = 3(1^p2'50'') = 3^p8'30'' = \frac{377}{120} \approx 3{,}1416666667$, met als werkelijke waarde in 9 decimalen 3,141592654. Later gebruikte Ptolemaeus inderdaad de waarde 3,1416… bij zijn berekeningen.

9. Een voorbeeld van het gebruik van de koordentabel

Van der Waerden vermeldt in zijn *Ontwakende wetenschap* (pp. 300-302) een planimetrisch probleem uit de *Almagest* [7]. De oplossing ervan is illustratief voor de werkwijze van Ptolemaeus.

Op een cirkel liggen drie punten: *A*, *B*, *C*. De bogen *BA*, en *BAC* zijn bekend. Uit een punt *D* buiten de cirkel worden die bogen onder de hoeken *BDA* en *BDC* gezien. Ook die hoeken zijn bekend. Er wordt nu gevraagd naar de afstand van het punt *D* tot het middelpunt van de cirkel (waarvan de straal gelijk is aan 60).



Ptolemaeus voert, zoals we zullen zien, zijn berekeningen telkens uit in rechthoekige driehoeken; hij kan bijna niet anders, omdat hij alleen de beschikking heeft over de lengtes van koorden in een cirkel (in zijn koordentabel).
Daarom worden de loodlijnen *EP* op *AB* en *EQ* op *CD* getekend, en ook de loodlijn *CR* op *AE*.

De gegevens waarop de berekening gebaseerd moet worden, zijn nu (bekend uit waarnemingen van Ptolemaeus):

$$\text{bg}(BA) = 53°35', \text{bg}(BAC) = 150°26', \angle BDA = 3°24', \angle BDC = 0°37'$$

In de cirkel op *ED* is de omtrekshoek *EDP* = 3°24'. Dus is bg(*EP*) = 6°48', zodat we krd(*EP*) via de koordentabel kunnen vinden:

$$\text{krd}(EP) = 7^p7'$$

waarbij uiteraard de lengte van *DE* gesteld is op 120^p.
Nu is ook $\angle EAP = \angle BEA - \angle BDA$ bekend (*stelling van de buitenhoek* van een driehoek), en daarmee ook bg(*EP*) in de cirkel met *AE* als middellijn (ook met lengte 120^p):

$$\angle EAP = 26°47'30'' - 3°24' = 23°23'30''$$

zodat: $\text{krd}(EP) = 47^p38'30''$.
We kunnen nu op basis van evenredigheden de lengte van *AE* berekenen bij dezelfde eenheid als waarbij $DE = 120^p$:

$$AE = 17^p55'32''$$

Op dezelfde manier vindt Ptolemaeus:

$$EQ = 1^p17'30'' \quad \text{en} \quad CE = 1^p20'23''$$

In driehoek *ACE* is de hoek bij *E* als omtrekshoek bekend:

$$\angle AEC = ½(150°26' - 53°35') = 48°25'30''$$

zodat (in driehoek *ERC*): $\angle RCE = 41°34'30''$
Via de loodlijn *CR* is driehoek *ACE* weer in twee rechthoekige driehoeken verdeeld, waardoor in driehoek *ERC* de verhouding tussen *ER* en *CR* ten opzichte van *CE* (lengte gesteld op 120^p) uit de koordentabel kan worden berekend:

$$ER = 79^p37'55'' \quad \text{en} \quad CR = 89^p46'14''$$

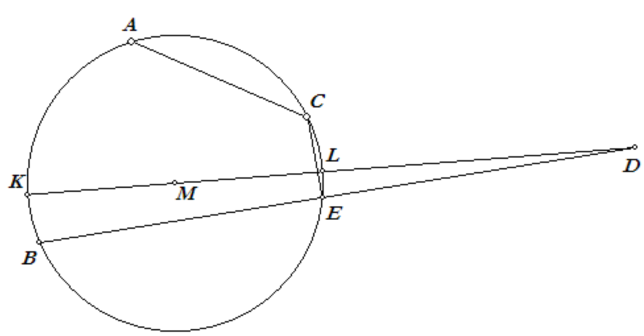
We hebben gevonden dat $CE = 1^p20'23''$ (bij $DE = 120^p$). En dit geeft dan (bij $DE = 120^p$):

$$ER = 0^p53'21'' \quad \text{en} \quad CR = 1^p0'8''$$

Zodat: $AR = AE - ER = 17^p55'32'' - 0^p53'21'' = 17^p2'11''$
Volgens de Stelling van Pythagoras in driehoek *ARC* is dan:

$$AC^2 = AR^2 + CR^2 = 291^p14'35''$$

zodat: $AC = 17^p3'57''$ (bij $DE = 120^p$)
Nu geldt op de oorspronkelijke cirkel: bg(*AC*) = bg(*BAC*) – bg(*BA*) = 96°51'.
Is nu *KL* de middellijn van die oorspronkelijke cirkel die door *D* gaat, dan kunnen we de lengte van *BE* gaan berekenen bij $KL = 120^p$.
Met de koordentabel vinden we $\text{krd}(AC) = 89^p46'14''$ (bij $KL = 120^p$).



En dan is, weer via evenredigheden, nu steeds met $KL = 120^p$:

$$DE = 631^p13'48'' \text{ en } CE = 7^p2'50''$$

We vinden dan via de koordentabel dat bg(*CE*) = 6°44'1", zodat:

$$\text{bg}(BCE) = 150°26 + 6°44'1'' = 157°10'1''$$

En dan is:

$$\text{krd}(BE) = 117^p37'32''$$

Voorts is ook:

$$DL \cdot DK = DB \cdot DE = (DE + BE) \cdot DE = 472.700^p5'32''$$

En ook is: $DL \cdot DK = DM^2 - KM^2 = DM^2 - 60^2$

waarmee we DM kunnen berekenen:

$$DM = 690^p8'42''$$

En daarmee is het gestelde probleem opgelost. ♦

10. Noten

[1] *Almagest* is de Latijnse verbastering van de Arabische naam 'al-kitabu-l-mijisti' d.w.z. 'het grote boek'. Het is oorspronkelijk geschreven in het Grieks onder de naam Μαθηματικῆς Συντάξεως Βιβλία ιγ (uitspraak: mathèmatikès suntaxe-oos biblia 13; betekenis: Mathematische verhandeling in dertien boeken). Later werd het boek aangeduid met de naam Ἡ Μέγαλη Συντάξις (uitspraak: hè megalè suntaxis; betekenis: De grote verhandeling) .
Het boek is een samenvatting van de stand van de astronomie in die tijd, en voor het grootste deel gebaseerd op wat reeds aan Hipparchos (ca. 190-120 v. Chr., Rhodos) bekend was, en dit alles uitgaande een geocentrisch wereldbeeld.

[2] **Elem.** XIII, 9 luidt in vertaling van E.J. Dijksterhuis in '*De Elementen van Euclides*' (Groningen: P. Noordhoff N.V., 1930):
Indien de zijde van den zeshoek en de zijde van den tienhoek, die in dezelfde cirkel zijn beschreven, worden samengevoegd, is de heele rechte in uiterste en middelste reden verdeeld en het grootste stuk daarvan is de zijde van den zeshoek.

[3] **Elem.** XIII, 10 luidt (ibidem):
Als in een cirkel een gelijkzijdige vijfhoek wordt beschreven, is het vierkant op de zijde van den vijfhoek gelijk aan de som van de vierkanten op de zijden van den zeshoek en van den tienhoek, bescheven in denzelfden cirkel.

[4] In hetgeen volgt zullen we in plaats van krd(bg(XY)), d.w.z. de koorde op de boog XY, schrijven: krd(XY).

[5] Met $\mathcal{F}$ geven we de functie aan die aan een gesloten figuur de oppervlakte van die figuur toevoegt; zo is $\mathcal{F}(XYZ)$ dan de oppervlakte van driehoek XYZ.

[6] We gebruiken hier twee termen uit de latere Latijnse vertalingen van de Griekse redentheorie.
Componendo betekent 'door samen te stellen'; uit de evenredigheid $a : b = c : d$ volgt componendo $(a + b) : b = (c + d) : d$.
Separando betekent 'door te scheiden'; uit de evenredigheid $a : b = c : d$ volgt separando $(a - b) : b = (c - d) : d$.

[7] In boek IV, 6 van de *Almagest* behandelt Ptolemaeus de berekening van de epicykel van de maan.
Een **epicykel** is een cirkel waarvan het middelpunt op een cirkel ligt die de aarde als middelpunt heeft. Als een planeet een epicykel doorloopt, dan maakt hij twee cirkelbewegingen tegelijk, waardoor het schijnt dat de planeet, vanuit de aarde gezien, soms vooruit en soms achteruit loopt.

11. Literatuur

- T. L. Heath (1921): *A History of Greek Mathematics*, vol. II. New York: Dover Publications (reprint 1981).
- A. Holme (2002): *Geometry, our cultural heritage*. Berlijn: Springer-Verlag.
- E. Maor (1998): *Trigonometric Delights*. Princeton (USA): Princeton University Press.
- B.L. van der Waerden (1950): *Ontwakende wetenschap*. Groningen: P. Noordhoff N.V.

