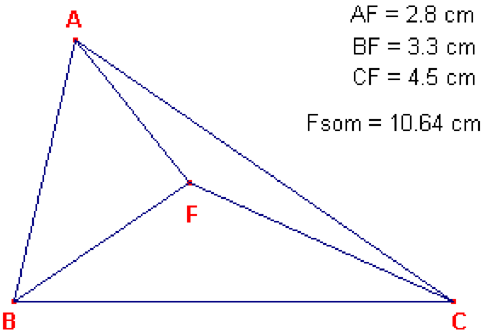
Cabri-werkblad

Het punt van Fermat en de driehoek van Napoleon

Formulering van het probleem

We gaan uit van een driehoek waaraan als enige beperking wordt opgelegd, dat alle hoeken kleiner moeten zijn dan 120º.
We zoeken **binnen** de driehoek een punt F waarvoor som van de afstanden tot de hoekpunten zo klein mogelijk is (zie figuur 1).

figuur 1



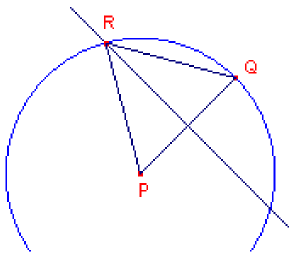
Opdracht 1 - het punt van Fermat

- Teken op een nieuw Cabri-werkblad driehoek ABC en teken ook een willekeurig punt F *binnen* de driehoek.
- Teken ook de lijnstukken waar het om gaat: FA, FB en FC.
- Bepaal met de functie “Afstand en lengte” in het *Reken*-menu de lengtes van deze lijnstukken.
- Bereken ook de som van lengtes van deze lijnstukken met de functie “Rekenmachine” in het *Reken*-menu. We noemen deze som de **Fsom**,
- Tracht nu door verplaatsing van het punt F de waarde van Fsom te minimaliseren (zo klein mogelijk te maken).
- Wat is volgens jou de minimale waarde van Fsom.
  Vermeld daarbij ook de lengtes van de zijden van de driehoek.

Intermezzo 1

In hetgeen volgt zullen we een aantal malen op een lijnstuk een gelijkzijdige driehoek moeten construeren.
Een macro hiervoor wordt hieronder beschreven.

figuur 2a



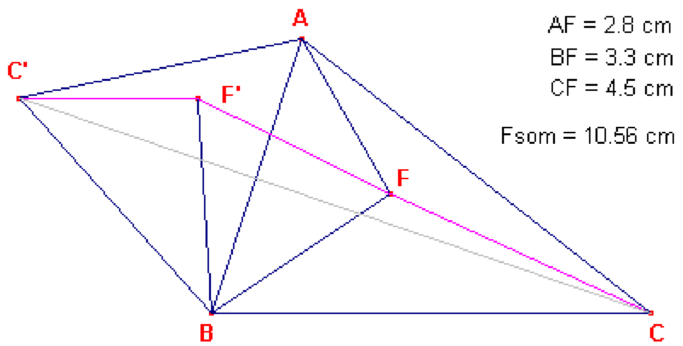
- Kies een nieuw werkblad met de functie “Nieuw” in het *Bestand*-menu.
- Teken een lijnstuk PQ en de middelloodlijn van PQ.
- Teken de cirkel met middelpunt P en straal PQ.
- Bepaal het snijpunt R van deze cirkel met de middelloodlijn (zie figuur 2a)
- Teken de lijnstukken PR en QR.
- Kies nu “Beginobjecten” in het *Macro*-menu.
- Selecteer eerst P en dan Q. Met deze volgorde leg je de oriëntatie van de gelijkzijdige driehoek vast.
- Kies vervolgens “Eindobjecten” in het *Macro*-menu.
- Selecteer dan de lijnstukken PR en QR.
- Kies tenslotte “Definieer macro” in het *Macro*-menu en geef de macro de naam *GelijkzDriehoek*.
- Druk ter afsluiting op OK.

De macro:GelijkzDriehoek staat nu ook in het *Macro*-menu.

Verder zoeken

Het probleem bij het vinden van de minimale waarde van Fsom ligt voor een deel in het feit, dat de drie lijnstukken eenzelfde eindpunt hebben.
We construeren daarom een figuur waarin FA + FB + FC op en andere manier kan worden bekeken.

figuur 2b



In figuur 2b is driehoek ABC' een gelijkzijdige driehoek die "uitwendig" beschreven is op de zijde AB.
Driehoek BFF' is eveneens gelijkzijdig en "naar buiten" beschreven op het lijnstuk BF.

- Toon aan, dat C'F' + F'F + FC = FA + FB + FC.
- Kies nu weer het werkblad waarop een gedeelte van figuur 2 staat (je eerste werkblad; via het *Venster*-menu).
- Teken ook het lijnstuk CC'.
- Construeer beide gelijkzijdige driehoeken met behulp van de macro:GelijkbDriehoek (denk om de volgorde van de eindpunten).
- Onderzoek hoe de punten F en F' moeten liggen (ten opzichte van het lijnstuk CC'), opdat de Fsom minimaal is.
- Spreek nu een vermoeden uit over de ligging van F en F' ten opzichte van het lijnstuk CC' en licht dat vermoeden kort toe.

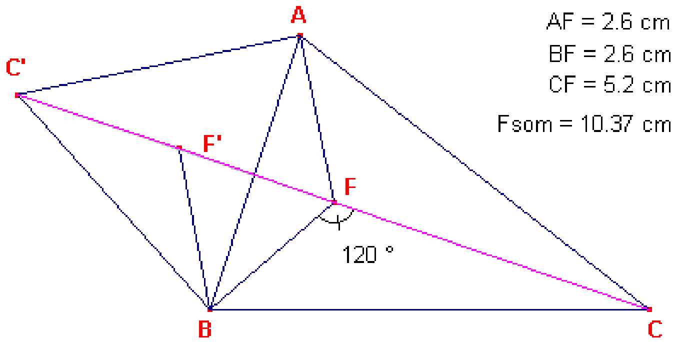
Aanwijzing
Fsom wordt blijkbaar bepaald door de lengte van het gebroken lijnstuk C'F'FC.
De ligging van C' is niet afhankelijk van de positie van F.
Wanneer is de afstand tussen C en C' via het gebroken lijnstuk minimaal?

We noemen het punt binnen de driehoek waarvoor de som van de afstanden tot de hoekpunten van de driehoek minimaal is, het **punt van Fermat** (Fermat-punt; naar *Pierre de Fermat*, 1601-1665) van de driehoek.
Het Fermat-punt van een driehoek wordt ook wel het **punt van Toricelli** (*Evangelista Toricelli*, 1608-1647) genoemd.
Het probleem is namelijk door Fermat ter oplossing aan Toricelli voorgelegd.
De oplossing van Toricelli is in 1659 gepubliceerd door Viviani, een leerling van Toricelli.

We zullen nu proberen een constructie van de ligging van het punt F te vinden (en niet een benadering ervan, zoals hierboven).

Opdracht 2

figuur 3



Ga ervan uit dat de punten F en F' op het lijnstuk CC' liggen.

- Bewijs nu dat hoek BFC in dit geval gelijk is aan 120°.
- Teken de omgeschreven cirkel van driehoek ABC'. Zie ook de paragraaf Intermezzo 2.
- Bewijs, dat deze cirkel door het punt F gaat.

Aanwijzing
Is er sprake van een koordenvierhoek? En zo ja, waarom?

- Verklaar nu ook waarom we naar driehoeken moeten kijken waarvan elke hoek kleiner is dan 120º?

Opdracht 3

Op basis van opdracht 2 kunnen we nu het Fermat-punt van een driehoek ABC construeren.
Hieronder staan de constructiestappen.

1. Construeer "uitwendig" op de zijde AB een gelijkzijdige driehoek ABC'.
2. Trek CC'.

3. Construeer de omgeschreven cirkel van driehoek ABC'. Zie ook de paragraaf Intermezzo 2.
4. Het snijpunt (anders dan C') van CC' en die "omcirkel" is het punt van Fermat van de driehoek.

- Neem nu een nieuw Cabri-werkblad (met de functie "Nieuw" in het *Bestand*-menu) en teken daarop een scherphoekige driehoek ABC.
- Construeer het Fermat-punt van die driehoek.

Intermezzo 2

Voor het tekenen van de omgeschreven cirkel (omcirkel) van een driehoek is het gebruik van een macro erg handig, temeer daar dat in hetgeen volgt nog een enkele keer voorkomt.
Wellicht staat op de disk(ette) die je gebruikt, al een dergelijke macro. Mogelijke namen zijn CIRCSCR.MAC, OMCIRKEL3P.MAC of CIRKEL3P.MAC.
Je kunt die macro opnemen in je huidige constructie via het *Bestand*-menu.

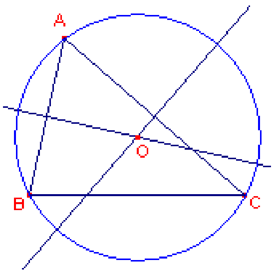
- Kies daartoe in het *Bestand*-menu de functie "Openen" en kies in de lijst bij "Bestandstype" voor "Macrobestanden (*.MAC)". Mogelijk dat je eerst van directory moet wisselen, bijvoorbeeld de subdirectory "Macros".
- Dubbelklik dan op de gewenste macro.

De macro staat daarna als laatste in het *Macro*-menu.

Opdracht 4 (facultatief)

Je kunt natuurlijk de macro ook zelf construeren.

figuur 4



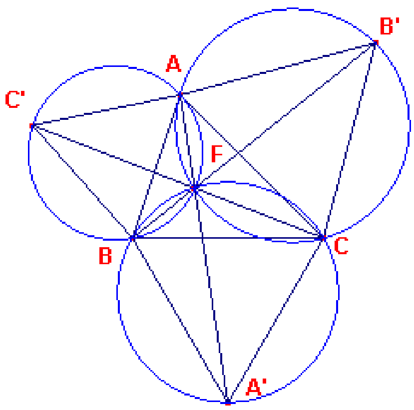
- Kies dan een nieuw Cabri-werkblad (gebruik weer de functie "Nieuw" in het *Bestand*-menu).
- Teken een driehoek ABC en construeer de middelloodlijnen van AB en AC.
- Bepaal het snijpunt O van deze middelloodlijnen.
- Teken de cirkel met O als middelpunt die door A gaat.
- Kies nu de functie "Beginobjecten" in het *Macro*-menu.
- Selecteer de punten A, B en C.
- Kies vervolgens de functie "Eindobjecten" in het *Macro*-menu.
- Selecteer de cirkel (het middelpunt hoef je niet te selecteren).
- Kies tenslotte de functie "Definieer macro" in het *Macro*-menu. We noemen deze macro in hetgeen volgt *Omcirkel3P*.
- Klik op OK en sluit hierna het venster met de functie "Sluiten" in het *Bestand*-menu.

De macro is nu te vinden in het *Macro*-menu van je huidige constructie.

Een eigenschap van het Fermat-punt

Hierboven is het Fermat-punt van driehoek ABC gevonden met behulp van een gelijkzijdige driehoek op de zijde AB.
Natuurlijk had je daarvoor ook een gelijkzijdige driehoek op de zijde BC of op de zijde CA kunnen kiezen.

figuur 5



Opdracht 5

- Construeer op de zijden BC en CA van de driehoek ABC twee (uitwendige) gelijkzijdige driehoeken, BCA' en CAB'. De gelijkzijdige driehoek op de zijde AB had je al, als het goed is.

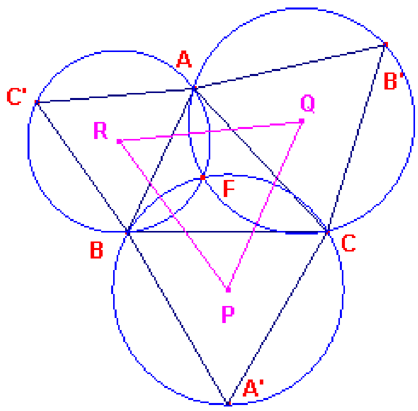
- Teken de omcirkels van de driehoeken BCA’ en CAB’ met behulp van de macro:Omcirkel3P.
- Teken ook de lijnstukken AA’ en BB’.
- Bewijs dat de omcirkels van de buitenwaarts op de zijden van de driehoek beschreven gelijkzijdige driehoeken door één punt gaan (het Fermat-punt van de driehoek).
- Bewijs dat AA’ = BB’ = CC’
- Bewijs ook dat deze lijnstukken door het Fermat-punt gaan.

Merk op, dat nu hoek AFB = hoek BFC = CFA = 120º.
Het punt F heet vanwege deze eigenschap ook wel het **isogonaal punt** van de driehoek: elke zijde wordt vanuit F onder dezelfde hoek (nl. 120º) gezien.

De Napoleon-driehoek van een driehoek

We bekijken nu de driehoek met als hoekpunten de middelpunten van de omcirkels van de buitenwaarts op de zijden van driehoek ABC beschreven gelijkzijdige driehoeken (zie driehoek PQR in figuur 6).

figuur 6



Deze driehoek heet de **Napoleon-driehoek** van driehoek ABC.
De driehoek is inderdaad genoemd naar de Franse keizer Napoleon Bonaparte (1768-1821). Verondersteld wordt dat deze in ieder geval enige belangstelling heeft gehad voor de wiskunde.

Opdracht 6

- Bewijs dat de Napoleon-driehoek van een driehoek gelijkzijdig is.
- Bewijs dat AA’ ⊥ QR, BB’ ⊥ PR en CC’ ⊥ PQ.

Aanwijzing
PQ is de centraal (verbindingslijnstuk van twee middelpunten) van de omcirkels van A’BC en AB’C.

Tenslotte: rekenen aan Fsom

Natuurlijk is de waarde van Fsom afhankelijk van de lengtes van de zijden van de driehoek.
Stel a, b, c zijn de lengtes van de zijden van de driehoek en O is de oppervlakte.

- Bewijs nu dat

$$Fsom^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3} \cdot O$$