Ellips-constructies met Cabri

0. Inleiding

De meest gebruikte definitie van de ellips luidt:

> Een **ellips** is de verzameling van punten (X) waarvoor de som van de afstanden tot twee vaste punten (F_1 en F_2, de brandpunten) constant is.

Notatie: $\{ X \mid XF_1 + XF_2 = 2a \}$.
Kiezen we een rechthoekig assenstelsel *Oxy* waarin $F_1 = (-c,0)$ en $F_2 = (c,0)$ en waarbij $c^2 = a^2 - b^2$, dan is de vergelijking van de ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(zie voor een afleiding van deze vergelijking (oa.) de website-pagina "Kegelsneden en hun vergelijkingen").

We geven hieronder een aantal Cabri-constructies van een ellips:

1. Constructie gebaseerd op de ellips-definitie;
2. Constructie gebaseerd op een lijnvermenigvuldiging van een cirkel;
3. Constructie waarbij de ellips de orthogonale projectie van een cirkel is;
4. Een ellips voortgebracht via een brandpunt en een richtlijn;
5. Constructie gebaseerd op de verplaatsing van een lijnstuk (met vaste lengte) over twee snijdende lijnen (definitie van **Johan de Witt**);
6. Ellips door 5 punten (stelling van **Pascal**).

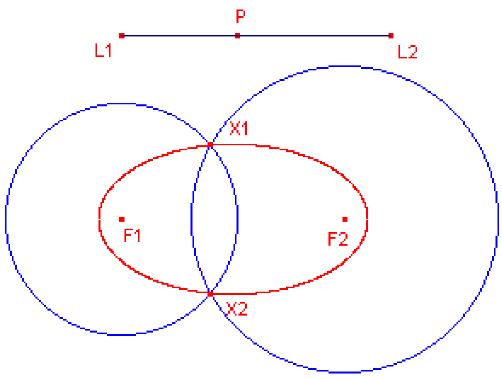
1. Constructie gebaseerd op de ellips-definitie

Zie figuur 1.

- Kies een lijnstuk L_1L_2 met vaste lengte 2a.
- Kies daarop een punt P. Nu is dus $PL_1 + PL_2 = 2a$.
- Teken ook de lijnstukken PL_1 en PL_2.
- Teken twee punten F_1 en F_2.
- Teken de cirkels (F_1, PL_1) en (F_2,PL_2) met behulp van de functie "Passer" in het *Constructie*-menu
- Teken ook de snijpunten X_1 en X_2 van deze cirkels.

De punten X_1 en X_2 bepalen nu de ellips, als P het lijnstuk L_1L_2 doorloopt.

figuur 1



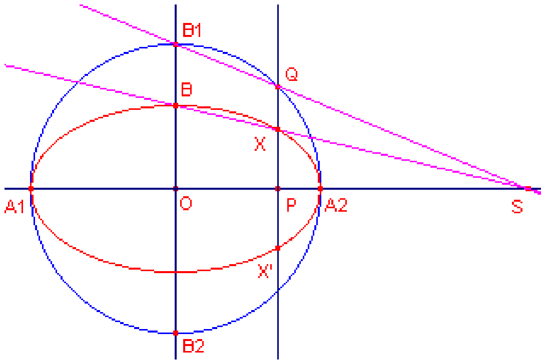
2. Constructie gebaseerd op een lijnvermenigvuldiging van een cirkel

Zie figuur 2.

- Teken een cirkel met middelpunt O en straal gelijk aan *a*.
- De snijpunten met de *x*-as (een lijn door O) zijn A_1 en A_2.
- Teken ook de y-as (een lijn door O loodrecht op de lijn A_1A_2.
- De snijpunten van de cirkel zijn B_1 en B_2.
- Teken ook het lijnstuk A_1A_2.
- Kies een punt P op het lijnstuk A_1A_2 en een punt B op de *y*-as. We stellen OB gelijk aan *b*.

We willen nu op de loodlijn door P op de x-as die de cirkel snijdt in het punt Q, het punt X construeren waarbij PX = b/a PQ.
Nu is OB = b = b/a OB_1.
We kunnen het punt X dus vinden met behulp van de lijn B_1Q, die de x-as snijdt in het punt S, en de lijn SB, die de loodlijn in P snijdt in X.

figuur 2



In dit geval moeten we wel aantonen, dat de verzameling van de punten X en X' (het spiegelbeeld van X in de x-as) een ellips is, als P het lijnstuk A_1A_2 doorloopt.
Op basis van vergelijking van de cirkel met middelpunt O en straal a geldt voor het punt Q: $x_Q^2 + y_Q^2 = a^2$
Hierin zijn x_Q en y_Q de coördinaten van het punt Q.
Voor het punt X hebben we nu: $\begin{cases} x_X = x_Q \\ y_X = \dfrac{b}{a} y_Q \end{cases}$ zodat $\begin{cases} x_Q = x_X \\ y_Q = \dfrac{a}{b} y_X \end{cases}$. Substitutie hiervan in bovenstaande betrekking geeft dan:

$$a^2 = x_X^2 + (\frac{a}{b} y_X)^2 = x_X^2 + \frac{a^2}{b^2} y_X^2$$

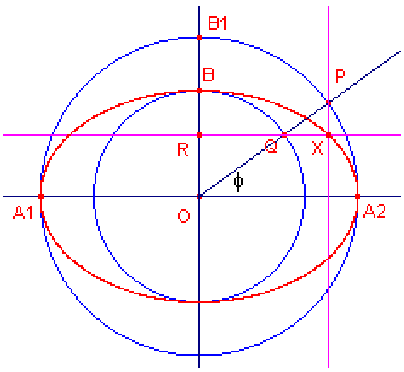
Deling van beide leden van de vergelijking door a^2 geeft dan de vergelijking van de ellips.

Opmerking
De bovenstaande methode is bijzonder geschikt om meerdere punten van een ellips te construeren.
[einde Opmerking]

3. Constructie als orthogonale projectie van een cirkel

Zie figuur 3a.

figuur 3a



In deze figuur:
– een cirkel met middelpunt O en straal a, die de x-as snijdt in de punten A_1 en A_2 en de y-as in het punt B_1;
– punt B is een willekeurig punt van de y-as; een cirkel met middelpunt O gaat door B;
– P is een willekeurig punt van de "grote" cirkel; door P gaat een halve lijn die de "kleine" cirkel snijdt in het punt Q;
– de hoek van de halve lijn met de positieve x-as is ϕ;
– de lijn door Q loodrecht op de y-as snijdt de lijn door P loodrecht op de x-as in het punt X.

Wanneer nu P de "grote" cirkel doorloopt, doorloopt het punt X een ellips.
Ook hier is natuurlijk een bewijs noodzakelijk.
Uitgaande van het punt P en de hoek ϕ hebben we:

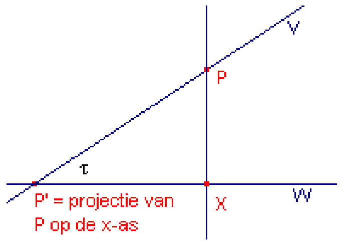
$$\begin{cases} x_P = a\cos\phi \\ y_P = a\sin\phi \end{cases} \text{ waarbij } 0 \le \phi \le 2\pi .$$

Voor X geldt dan:

$$(3.1)\ldots\begin{cases} x_X = a\cos\phi \\ y_X = b\sin\phi \end{cases}$$

Dit laatste kunnen we het snelst afleiden door het punt X (gelegen in een vlak W) op te vatten als **orthogonale projectie** van het punt P (gelegen in een vlak V), waarbij de hoek tussen V en W gelijk is aan τ,met cos τ = b/a, terwijl V en W elkaar snijden volgens de x-as (zie figuur 3b).

figuur 3b



Nu is:

$$PP' = a\sin\phi$$

$$XP' = PP' \cdot \cos\tau = a\sin\phi \cdot \frac{b}{a} = b\sin\phi$$

Uit het stelsel (3.1) volgt dan door kwadratering de vergelijking van de meetkundige plaats van het punt X:

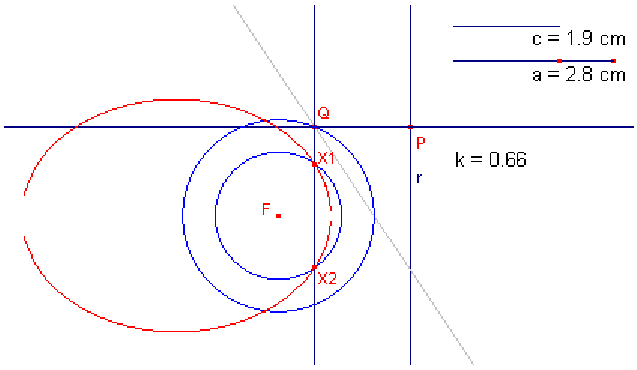
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

4. Een ellips voortgebracht via een brandpunt en een richtlijn

We kiezen een punt F en een rechte lijn r (die niet door F gaat).
De lijn r heet **richtlijn** van de ellips.
We trachten nu de meetkundige plaats te bepalen van de punten X waarvoor geldt **XF = k . d(X, *r*)**, waarbij verder $k < 1$.
Het getal k heet de **excentriciteit** van de kegelsnede. Deze wordt bijna altijd aangegeven met de letter e.

We geven hieronder een globale beschrijving van de constructie (zie figuur 4).
Zij P een willekeurig punt op de lijn r.
We construeren uitgaande van P allereerst een punt Q dat gelijke afstanden heeft tot F en r.
We moeten nu op de lijn door Q evenwijdig met r een punt construeren een punt X construeren met XF = kQF = k d(Q, r).
Dit doen we met de functie "Vermenigvuldiging" uit het *Afbeeldingen*-menu van Cabri:
We moeten daartoe echter eerst de verhouding k vastleggen.
Om een algemeen werkende constructie te verkrijgen leggen we k vast als de verhouding tussen twee lijnstukken c en a (met c deel van a).
Vermenigvuldigen we nu het punt Q ten opzichte van F met k (met beeldpunt Q'), dan kunnen we het gezochte punt X vastleggen (op de lijn door Q evenwijdig aan r) met de cirkel (F,FQ').

figuur 4



Nb.
In figuur 4 is een kortere constructie uitgevoerd: de cirkel (F, FQ) is vermenigvuldigd met *k* ten opzichte van het punt F.
Merk op, dat er twee punten, X_1 en X_2, uit de constructie volgen. Beide bepalen een deel van de meetkundige plaats.

Het noodzakelijke bewijs laten we hier achterwege.

5. Constructie gebaseerd op de verplaatsing van een lijnstuk (met vaste lengte) over twee snijdende lijnen

Johan de Witt (1625-1672), raadpensionaris van de Staten van Holland, voegt op 8 oktober 1658 aan een brief aan Frans van Schooten de Jongere (1615-1660) "eene aenspraecke aan UE" toe, waarin (in vertaling van Dr.A.W.Grootendorst) hij schrijft:

> "Toen ik echter de leerboeken van de overige kromme lijnen -voorzover deze door de Ouden zijn overgeleverd en door jongeren zijn verklaard- nauwkeurig had bestudeerd, achtte ik het volslagen in te gaan tegen de natuurlijke orde -die men in de wiskunde zoveel mogelijk in acht moet nemen- dat men de oorsprong van deze krommen zoekt in een ruimtelijk lichaam en deze vervolgens overbrengt naar het platte vlak."

De Witt stoorde zich blijkbaar aan het feit, dat de bekende kegelsneden door de Grieken (onder wie Apollonius van Perga) de vlakke krommen via ruimtelijke beschouwingen genereerden, namelijk als doorsnijding van een kegel en een plat vlak.
In zijn boek "*Elementa Curvarum Linearum*" (Grondbeginselen van de Kromme Lijnen -voor het eerst uitgegeven in 1659 door Frans van Schooten de Jongere, als bijlage bij een vertaling van René Descartes' "*La Géométrie*") geeft Johan de Witt als eerste definities van de kegelsneden zonder daarbij gebruik te maken van een kegel.

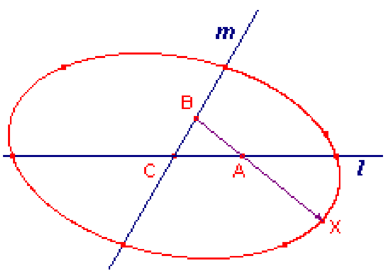
We geven de "definitie" van De Witt (opnieuw in vertaling van Dr.A.W. Grootendorst):

> "Stel dat van een willekeurige rechthoekige driehoek één zijde - of deze nu de rechte hoek onderspant of tegenover één van de scherpe hoeken ligt - in deze hoek zodanig beweegt, dat elk eindpunt van deze bewegende zijde steeds ligt en blijft liggen op de zijde waarmee dit vanaf het begin verbonden was, terwijl deze zo nodig of naar de ene kant of naar de andere kant verlengd is.
> Laat verder deze beweging voortgezet worden zowel over de nevenhoeken als over de overstaande hoek van de eerder genoemde hoek totdat de bewegende zijde is teruggekeerd in de beginstand.
> Laat tenslotte door een willekeurig punt op deze lijn, of eventueel het verlengde daarvan, een kromme worden beschreven: […]"

Stelling
Indien de eindpunten A en B van een lijnstuk met vaste lengte opvolgend op de benen l en m van een hoek liggen en op het lijnstuk (of het verlengde ervan) een punt X ligt, dan is de meetkundige plaats van de punten X een ellips, als de punten A en B de lijnen l en m doorlopen.

Opmerking

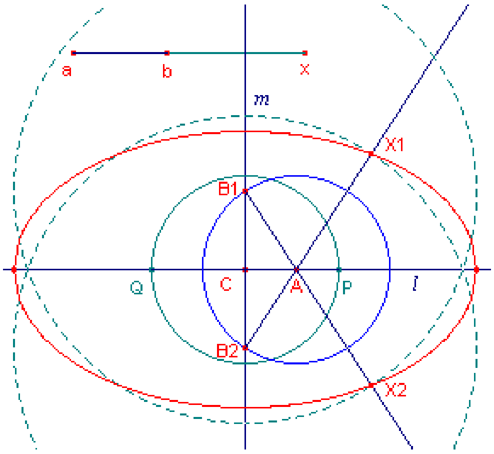
figuur 5a



De Witt gaat uit van een rechthoekige driehoek. Maar ook met een willekeurige driehoek wordt een ellips gegenereerd.
[einde Opmerking]

We geven hieronder weer de Cabri-constructiestappen voor een rechthoekige driehoek ABC.
Zie figuur 5b.

figuur 5b

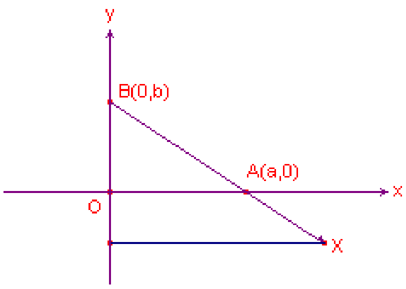


- Teken een lijnstuk ax (eindpunten aangegeven met kleine letters), met daarop een punt b. Teken ook het lijnstuk ab.
- Teken een punt C en daardoor twee loodrecht op elkaar staande lijnen *l* en *m*.
- Omdat het punt A (op *l*) maximaal de afstand ab kan afleggen ter weerszijden van C, construeren we op *l* een lijnstuk met C als midden ter lengte van 2ab:
  Teken de cirkel met middelpunt C en straal ab (met de functie "Passer"). Deze cirkel snijdt de lijn *l* in de punten P en Q.
- Teken het lijnstuk PQ en kies het punt A hierop.
- Op *m* zijn er nu twee punten, B_1 en B_2, op afstand ab van A (teken de cirkel met middelpunt A en straal ab met de functie "Passer").
- Construeer op de halve lijnen B_1A en B_2A de punten X_1 en X_2 zodat B_1X_1 = ab en B_2X_2 = ab (met de functie "Passer").

Als nu A het lijnstuk PQ doorloopt, dan bepalen X_1 en X_2 de ellips.

We geven het bewijs op de moderne manier.

figuur 5c



A(a,0) en B(0,b) zijn punten op opvolgend de x- en y-as. Stellen we de vaste lengte van AB gelijk aan p, dan is
(5.1) … $a^2 + b^2 = p^2$.
Zij X op (het verlengde van) AB zo gelegen, dat BX = kBA.
Voor de coördinaten van het punt X hebben we dan (zie figuur 5c):

$$\begin{cases} x_X = ka \\ y_X = kb - b \end{cases}$$

Hieruit vinden we

$$\begin{cases} a = \dfrac{x_X}{k} \\ b = \dfrac{y_X}{k-1} \end{cases}$$

Substitueren we dit in de betrekking (5.1), dan krijgen we, met weglating van de index X:

$$\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{(k-1)^2}=p^2$$

Deling door p^2 geeft dan:

$$\frac{x^2}{k^2p^2}+\frac{y^2}{(k-1)^2p^2}=1$$

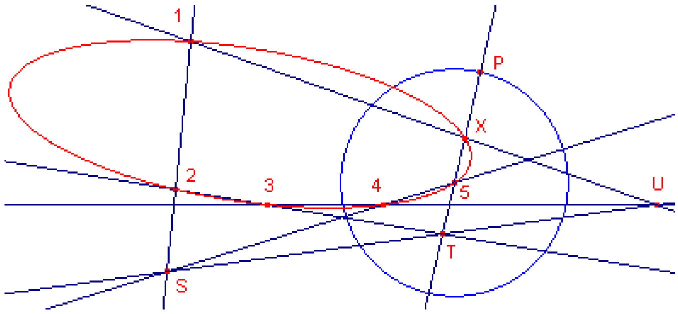
En dit is de vergelijking van een ellips.

6. Ellips door 5 punten (stelling van Pascal)

Een kegelsnede kan worden bepaald door 5 punten.
Een zesde punt (van die kegelsnede) kan dus worden gebruikt om de kegelsnede te doorlopen.
Zoals bekend zijn de snijpunten van de overstaande zijden van een zeshoek die beschreven is in een kegelsnede, collineair (stelling van Pascal).
Hiervan kunnen we gebruik maken om het zesde punt, uitgaande van 5 punten die de kegelsnede vastleggen, te construeren.
We geven de constructiestappen:

- Teken 5 punten: 1, 2, 3, 4, 5
- Teken een cirkel met middelpunt 5 en willekeurige straal.
- Kies een punt P op die cirkel.
- Teken een lijn door 5 en P. Deze lijn is een zijde van de zeshoek.
- Teken de lijnen 12 en 45. Deze snijden elkaar in het punt S. Dit punt S is een punt van de collineatie-as.

figuur 6



- Teken de zijde 23 van de zeshoek. Deze snijdt de overstaande zijde (de lijn door punt 5) in het punt T.
- Teken de collineatie-as ST.
  Deze collineatie-as snijdt de zijde 34 in het punt U.
- De overstaande zijde van 34 is de lijn X1. Teken dus de lijn door de punten U en 1.
  Deze snijdt de lijn door punt 5 in het punt X.

Indien nu P de cirkel doorloopt, doorloopt het punt X de ellips door de punten 1, 2, 3, 4 en 5.

7. De functie "Meetkundige plaats" in het *Constructie*-menu

In alle bovenstaande figuren is de meetkundige plaats van het punt S geconstrueerd met de functie "Meetkundige plaats" in het *Constructie*-menu van Cabri.
Deze functie is alleen bruikbaar als het object waarvan de meetkundige plaats afhankelijk is een punt is, dat gedefinieerd is op een baan (een cirkel, een lijnstuk, een halve lijn, ed).
In alle bovenstaande gevallen is daarvan dan ook gebruik gemaakt.
Bij de laatste constructie, ellips door 5 punten, moet gebruik gemaakt worden van een willekeurige lijn door het punt 5.
Om het mogelijk te maken, dat via deze lijn de meetkundige plaats van het punt X door Cabri kan worden berekend (en getekend), wordt de draaiing van de lijn bewerkstelligd via het punt P op de (hulp)cirkel met het punt 5 als middelpunt.

Voorbeeld

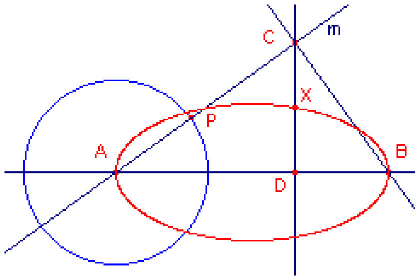
Gegeven zijn de punten A en B.
Door het punt A gaat een lijn *m*.

Het voetpunt van de loodlijn uit B op *m* is het punt C.
X is het midden van de hoogtelijn uit C op AB.
Bepaal de meetkundige plaats van het punt X als, de lijn *m* om het punt A draait.

Ook hier moet de draaiing van *m* om het punt A bewerkstelligd worden via een punt P op een hulpcirkel.
Constructiestappen:

- Teken de punten A en B.
- Teken een cirkel met middelpunt A met willekeurige straal.
- Kies het punt P op de cirkel.
- Teken de lijn *m* door de punten A en P.
- Teken de loodlijn uit B op *m*.
- Bepaal het voetpunt C van deze loodlijn (op de lijn *m*).
- Bepaal het voetpunt D van de loodlijn uit C op AB.
- Construeer het midden X van CD (zie figuur 7).

figuur 7



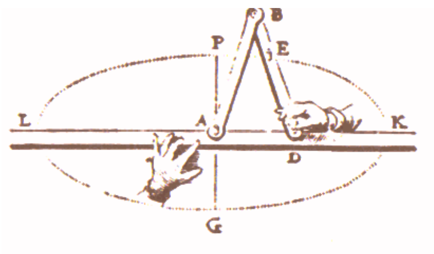
- Kies de functie "Meetkundige plaats" in het *Constructie*-menu van Cabri.
- Selecteer het punt X en daarna het punt P.

Hierna wordt de meetkundige plaats door Cabri getekend (een ellips).
[einde Voorbeeld]

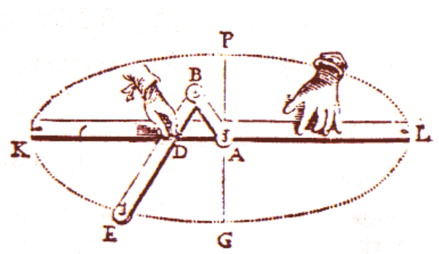
8. Ellipsograaf

Vermoedelijk op basis van de door De Witt gegeven definitie is door Van Schooten een apparaat ontwikkeld waarmee een ellips kan worden getekend; dit apparaat staat bekend onder de naam “ellipsograaf van Van Schooten” (zie figuur 8a en figuur 8b).

figuur 8a

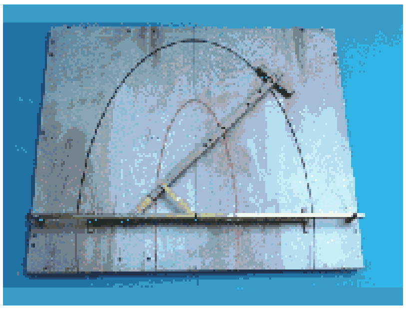


figuur 8b



Twee stangen zijn in het punt B scharnierend aan elkaar verbonden. In het punt E is een schrijfstift bevestigd.
Het eindpunt A van de ene stang is scharnierend bevestigd in de oorsprong. Het punt D van de andere stang kan alleen horizontaal worden bewogen langs een lat KL..
In het “Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica” te Modena (Italië) bevindt zich ook een dergelijk apparaat (zie figuur 9).

figuur 9

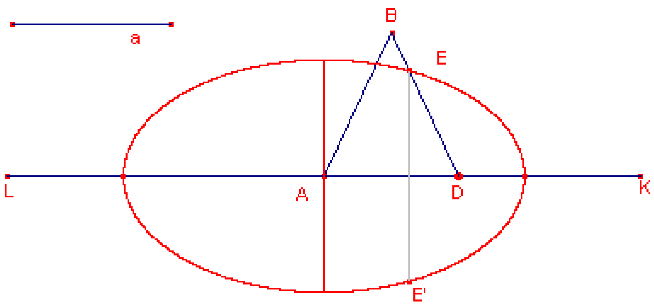


We kunnen in Cabri een model van deze ellipsograaf maken.

In figuur 8a kan het punt D op KL precies de lengte van AB+BD afleggen.
De maximale lengte van KL is dus 4xAB.

- Teken een lijnstuk, waarvan de lengte *a* gelijk is aan de lengte van AB.
- Teken een lijnstuk KL waarvan de lengte 4*a* is.
- Teken het punt A als midden van KL.
- Kies het punt D op KL (met de functie “Punt op object” in het *Punt*-menu).
- Teken de cirkels (A, *a*) en (D, *a*).
- Zij B één van de snijpunten van deze cirkels.
- Kies het punt E op BD.
- Construeer het spiegelbeeld van E’ van E in de lijn KL.

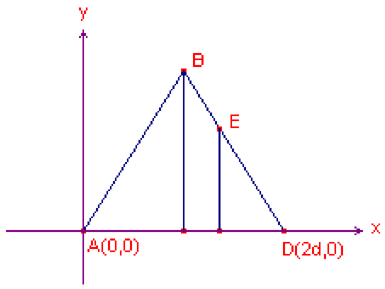
figuur 10



De ellips wordt nu bepaald door de punten E en E’, als het punt D het lijnstuk KL doorloopt.
Nb.
Cabri tekent ook een lijnstuk door A loodrecht op de lijn KL.

Ook nu is een bewijs op zijn plaats.
Stel de coördinaten van het punt D (op de lijn KL) zijn (2*d*,0).
Stel X ligt op BD, zodat DA=*ka* (zie figuur 11):

figuur 11



Voor de coördinaten van het punt B hebben we dan:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ (x-2d)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

Hieruit volgt dan $\begin{cases} x_B = d \\ y_B = \sqrt{a^2 - d^2} \end{cases}$.

Voor het punt E volgt hieruit, vanwege de verhouding $k : 1$ op het lijnstuk DB:

(8.1) ... $\begin{cases} x_E = 2d - kd = d(2-k) \\ y_E = k\sqrt{a^2 - d^2} \end{cases}$ waaruit dus volgt: $\begin{cases} d = \dfrac{x}{2-k} \\ d^2 + \dfrac{y^2}{k^2} = a^2 \end{cases}$.

Eliminatie van d uit deze laatste betrekkingen levert dan de vergelijking van de ellips:
$\dfrac{x^2}{(2-k)^2}+\dfrac{y^2}{k^2}=a^2$ of $\dfrac{x^2}{(2-k)^2a^2}+\dfrac{y^2}{k^2a^2}=1$.

Opmerkingen
[1]
Voor k = 1 (het punt E valt dan samen met B) gaat deze vergelijking in:
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$.
Dit is de vergelijking van de cirkel met middelpunt A en straal a.
[2]
Voor k = 2 is de betrekking niet gedefinieerd.

In dit geval geldt $\begin{cases} x_E = 0 \\ y_E = 2\sqrt{a^2-d^2} \end{cases}$; zie betrekking (8.1). De meetkundige plaats van de punten E is in dit geval dus de y-as.

[einde Opmerkingen]