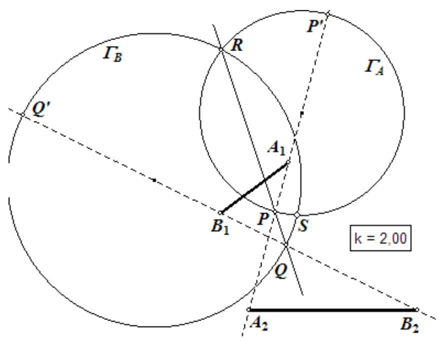
Draaistrekking en negenpuntscirkel

[Dick Klingens]

Vooraf

In twee al enige tijd geleden verschenen nummers van Euclides schrijft Wim Pijls over *Gelijkvormigheid* (zie [*e*]). In de tweede aflevering stelt hij de *draaistrekking* (draaivermenigvuldiging) aan de orde.
Pijls' definitie: Een gelijkvormigheidsafbeelding bestaande uit een draaiing (rotatie) over een hoek α gevolgd door een puntvermenigvuldiging, beide met hetzelfde centrum, heet een draaistrekking (DS).
Daarbij geeft hij ook aan hoe, met gebruikmaking van Apollonius-cirkels, het centrum van de DS kan worden geconstrueerd bij twee gegeven punten en hun beeldpunten (**zie figuur 1**).

Figuur 1



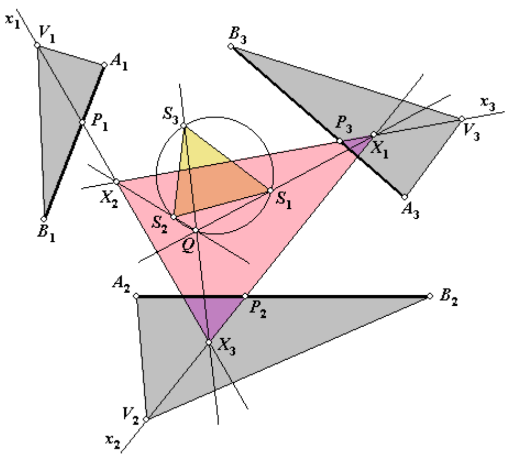
Het lijnstuk A_1B_1 wordt door een DS (in de figuur met factor $k = 2$) afgebeeld op het lijnstuk A_2B_2.
PP' is de middellijn van de Apollonius-cirkel Γ_A met factor k bij de punten A_1, A_2; QQ' is die van Γ_B bij de punten B_1, B_2. De lijn PQ snijdt de beide cirkels ook in hun snijpunt R.
Het andere snijpunt van de cirkels is dan het centrum S van de DS.
Zie ook [*c3*] voor een andere constructie van het DS-centrum.

In hetgeen volgt worden DS'en toegepast bij één van de (en misschien wel de meest) fascinerende eigenschappen van de driehoek, namelijk de *negenpuntscirkel*. Maar voordat het zover is, moeten we ons toch nog wel door wat theorie 'worstelen'.

Drie direct-gelijkvormige figuren

We bekijken drie figuren die direct-gelijkvormig zijn; ze hebben dan alle dezelfde oriëntatie. We gaan hier uit van de driehoeken $V_1A_1B_1$, $V_2A_2B_2$, $V_3A_3B_3$ (**zie figuur 2**), maar niets weerhoudt ons er uiteraard van andere figuren te bekijken.

Figuur 2



De drie DS-centra zijn dan met de in figuur 1 geïllustreerde constructie eenvoudig te vinden:

- S_3 voor $V_1A_1B_1 \to V_2A_2B_2$ ($V_1A_1B_1$ wordt afgebeeld op $V_2A_2B_2$)
- S_1 voor $V_2A_2B_2 \to V_3A_3B_3$
- S_2 voor $V_3A_3B_3 \to V_1A_1B_1$

We zullen een DS hier meestal aangegeven met alleen de naam van het centrum: de DS met centrum S_1 noemen we kortweg (de afbeelding) S_1; enz. Voor de afbeeldingen S_1, S_2, S_3 geldt dat de productafbeelding $S_2 \circ S_1 \circ S_3$ (het van rechts naar links na elkaar uitvoeren) gelijk is aan de identieke afbeelding.
De rotatiehoeken worden in Pijls' artikel aangegeven met zogenoemde *gerichte hoeken*, maar er is in dit geval een eenvoudiger manier.

Zij namelijk $V_1P_1 \equiv x_1$ een willekeurige lijn door het hoekpunt V_1 (met P_1 op A_1B_1) in driehoek $V_1A_1B_1$ (zie weer **figuur 2**), dan maken de *overeenkomstige* [1] beeldlijnen x_2 (via S_3) in $V_2A_2B_2$, en x_3 (via S_1) in $V_3A_3B_3$ gelijke hoeken met de overeenkomstige zijden van die driehoeken. De hoeken van de driehoek die gevormd wordt door de lijnen x_1, x_2, x_3, **in figuur 2** is dat driehoek $X_1X_2X_3$, zijn dus constant (gelijk aan $\alpha_1, \cdots$). De hoeken van deze driehoek kunnen we dus ook gebruiken als rotatiehoeken.
Naamgeving. Driehoek $S_1S_2S_3$ noemen we *DS-driehoek*, de omgeschreven cirkel (omcirkel) ervan *DS-cirkel*; de driehoeken $X_1X_2X_3$ noemen we *homologiedriehoeken* [2]. En dan hebben we direct:

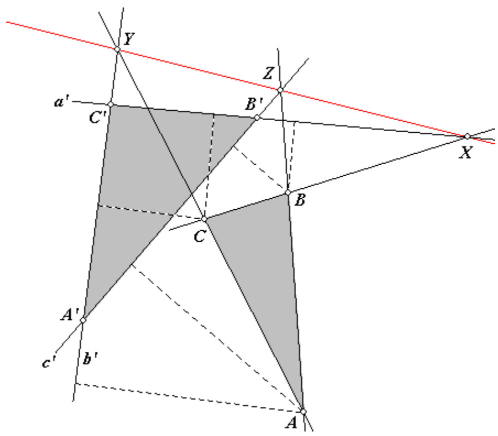
Stelling 1. *Alle homologiedriehoeken gevormd door de snijpunten van overeenkomstige lijnen zijn gelijkvormig*.

We bewijzen nu allereerst:

Lemma 1. *Twee driehoeken ABC en A'B'C' , de laatste met zijden a', b', c', zijn lijnperspectief dan en slechts dan als* [3]:

$$\frac{Ab'}{Ac'} \cdot \frac{Bc'}{Ba'} \cdot \frac{Ca'}{Cb'} = 1$$

Figuur 3



We gaan uit van de juistheid van het tweede deel van de stelling (de formule) en bewijzen dat de driehoeken lijnperspectief zijn. Stel de 'gelijknamige' zijden van de driehoeken snijden elkaar in de punten X, Y, Z (**zie figuur 3**). Te bewijzen is dan dat X, Y, Z op dezelfde lijn liggen. Er geldt:
$Ca' : Ba' = CX : BX, \quad Ab' : Cb' = AY : CY, \quad Bc' : Ac' = BZ : AZ$
Vermenigvuldiging geeft nu [4]:

$$1 = \frac{Ca'}{Ba'} \cdot \frac{Ab'}{Cb'} \cdot \frac{Bc'}{Ac'} = \frac{XC}{XB} \cdot \frac{YA}{YC} \cdot \frac{ZB}{ZA}$$
$$= (CBX) \cdot (ACY) \cdot (BAZ)$$

De Stelling van Menelaos [5], toegepast op driehoek ABC met punten X, Y, Z op de zijden, zegt dan dat uit $(CBX) \cdot (ACY) \cdot (BAZ) = 1$ volgt dat de punten X, Y, Z op eenzelfde transversaal [6] liggen.
Het bewijs van het eerste deel van de stelling laten we aan de lezer. ■

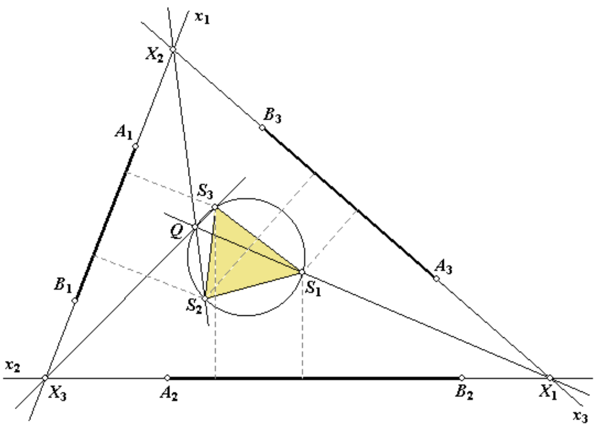
En dan kunnen we bewijzen:

Stelling 2. *Een homologiedriehoek is puntperspectief met de DS-driehoek.*

Met andere woorden: de lijnen S_kX_k (met k = 1,2,3) gaan door één punt (**in figuur 2** is dat het punt Q).

We beginnen met het vereenvoudigen van de 'constructie' van figuur 2, zonder daarmee echter de algemene geldigheid geweld aan te doen.
We kiezen de lijn x_1 langs het lijnstuk A_1B_1: we kiezen V_1 op (het verlengde van) A_1B_1 (**zie figuur 4**), waardoor ook x_k (k = 2,3) langs A_kB_k valt.

Figuur 4



Zij nu $|A_kB_k| = a_k$.
De gelijkvormigheidsfactoren bij de opvolgende afbeeldingen S_3, S_1, S_2 zijn dan:

$$k_3 = a_2/a_1, \quad k_1 = a_3/a_2, \quad k_2 = a_1/a_3$$

Nu geldt:

$$S_1x_2 : S_1x_3 = k_2 : k_3$$
$$S_2x_3 : S_2x_1 = k_3 : k_1$$
$$S_3x_1 : S_3x_2 = k_1 : k_2$$

Vermenigvuldiging van deze uitdrukkingen geeft: $\frac{S_1x_2}{S_1x_3} \cdot \frac{S_2x_3}{S_2x_1} \cdot \frac{S_3x_1}{S_3x_2} = \frac{k_2}{k_3} \cdot \frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{k_1}{k_2} = 1$, waaruit, via Lemma 1, volgt dat de driehoeken $S_1S_2S_3$ en $X_1X_2X_3$ lijnperspectief zijn.
Uit de Stelling van Desargues [7] (*Twee driehoeken die lijnperspectief zijn, zijn ook puntperspectief*) volgt dan: de lijnen S_kX_k (met k = 1,2,3) gaan door één punt.
In dit geval is dat dus het punt Q. ■

In **figuur 2** en in **figuur 4** lijkt het erop dat het punt Q op de DS-cirkel ligt. Wel, dat is inderdaad zo. Er geldt:

Stelling 3. *Het perspectiefcentrum van een homologiedriehoek en de DS-driehoek ligt op de DS-cirkel*.

Zoals reeds is opgemerkt, wordt de grootte van de hoeken van driehoek $X_1X_2X_3$ bepaald door de afbeeldingen S_k. Dat is ook het geval met de hoeken die (bijvoorbeeld) S_1X_1 maakt met X_1X_3 en X_1X_2; enz.
Hun som is echter constant (gelijk aan 180°) en de verhouding van de sinussen van die hoeken is dat ook (in het voorbeeld namelijk gelijk aan k_3/k_2).
De hoeken X_jQX_k ($j, k = 1, 2, 3$ met $j \neq k$) zijn dan eveneens constant, en dus ook de hoeken S_jQS_k. Q ligt dan inderdaad op de omcirkel van driehoek $S_1S_2S_3$ (volgens de *Stelling van de constante hoek*). ■

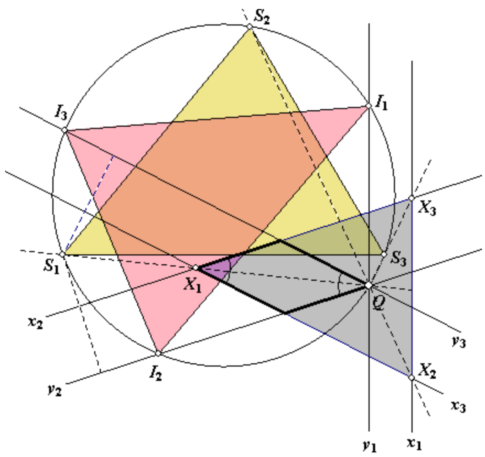
Gevolg (van stelling) 3. Drie overeenkomstige lijnen vormen een driehoek die puntperspectief is met de DS-driehoek (Stelling 2). Het perspectiefcentrum ligt op de DS-cirkel (Stelling 3). En dus…

Snijden drie overeenkomstige lijnen elkaar in één punt, dan ligt dat gemeenschappelijke snijpunt op de DS-cirkel.

Stelling 4. *Van de lijnen die evenwijdig zijn aan de zijden van een homologiedriehoek en die gaan door het bijbehorende perspectiefcentrum, gaat elke lijn door een (ander) vast punt van de DS-cirkel*.

Zie figuur 5. Hierin zijn de lijnen x_k weer overeenkomstige lijnen die een driehoek $X_1X_2X_3$ vormen. Het bijbehorend perspectiefcentrum is Q (dat volgens Gevolg 3 op de DS-cirkel ligt).
De lijnen y_k zijn de lijnen door Q evenwijdig met de lijnen x_k. Zo'n lijn y_k snijdt de DS-cirkel behalve in Q ook in I_k.
De punten X_1 en Q zijn overstaande hoekpunten van een parallellogram, waarin dan $\angle I_2QI_3 = \angle X_1 = \alpha_1$.

Figuur 5



Hoek I_2QI_3 is dus constant. Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat de hoeken I_3QI_1 en I_1QI_2 constant zijn. En dat alles is alleen maar mogelijk als I_1, I_2, I_3 vaste punten zijn op de DS-cirkel. Waarmee het gestelde is aangetoond. ■

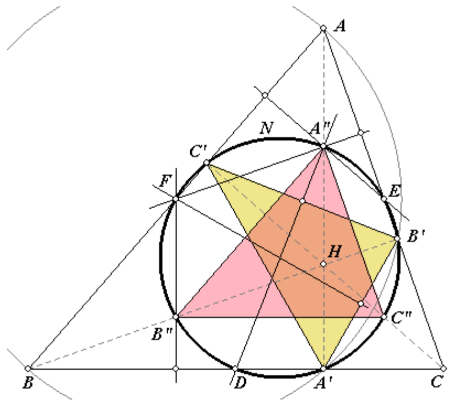
Naamgeving. Driehoek $I_1I_2I_3$ heet de *invariante driehoek* bij de productafbeelding $S_3 \circ S_1 \circ S_2$. De hoekpunten van die driehoek heten *invariante punten*.

Eindelijk: Feuerbach

Stelling 5 (Karl Feuerbach, 1800-1834). *Van een driehoek liggen de voetpunten van de hoogtelijnen, de middens van de zijden en de middens van de hoogtelijnstukken tussen de hoekpunten en het hoogtepunt op een cirkel* (de *negenpuntscirkel* van de driehoek, ook wel *Feuerbach-cirkel* of *Steiner-cirkel* genoemd).

Zie figuur 6. In driehoek *ABC* zijn *AA'*, *BB'*, *CC'* de elkaar in het hoogtepunt *H* snijdende hoogtelijnen. De driehoeken *AB'C'*, *A'BC'* en *A'B'C* zijn dan elk indirect-gelijkvormig met driehoek *ABC* en daardoor direct-gelijkvormig met elkaar.
Het is direct duidelijk dat de punten *A'*, *B'*, *C'* de DS-centra van deze driehoeken zijn; met andere woorden: de omcirkel *N* van driehoek *A'B'C'* is de DS-cirkel.

Figuur 6



De punten *D*, *E*, *F* zijn de middens van de zijden van driehoek *ABC*; de punten *A"*, *B"*, *C"* zijn de middens van de lijnstukken *AH*, *BH*, *CH*.
De middelloodlijnen van de lijnstukken *AB'*, *A'B* en *A'B'* zijn nu overeenkomstige lijnen. Maar deze lijnen gaan alle door het punt *F*, immers *ABA'B'* is een koordenvierhoek en *F* is het middelpunt van de omcirkel daarvan. Het punt *F* ligt dan volgens Gevolg 3 (bij Stelling 3) op de DS-cirkel *N*. En dit geldt, analoog redenerend, ook voor de punten *D* en *E*.
De middelloodlijnen van *B'C'*, *AC'*, *AB'* snijden elkaar in *A"* (*A"* is het midden van *AH*; immers *A"F* // *BH* in driehoek *BHA*). Het punt *A"* moet dus een invariant punt van het systeem zijn. En de punten *B"* en *C"* zijn dat dan ook. Die punten liggen ook op de DS-cirkel.

Samenvattend: de in de stelling genoemde punten, te weten *A'*, *B'*, *C'*, *D*, *E*, *F*, *A"*, *B"*, *C"* – negen stuks dus – liggen op een cirkel. ■

Met dank aan Wim Pijls voor zijn opmerkingen bij een eerdere versie van dit artikel.

Noten

[1] Met *overeenkomstige* lijnen, zijden, … bedoelen we hier lijnen, zijden, … die door opvolgende DS'en uit elkaar worden verkregen.
[2] *Homologie* (overeenstemming) wordt in de projectieve meetkunde wel gebruikt in de speciale betekenis *perspectiviteit*.
[3] Met *Xm* bedoelen we de afstand van het punt *X* tot de lijn *m*.
[4] (*ABC*), een door het punt *C* bepaalde *deelverhouding* op de lijn *AB*, is een verkorte schrijfwijze voor *CA*/*CB*.
[5] Voor een bewijs van de Stelling van Menelaos zie [*c2*] of [*f*, pp. 106-107].
[6] Een *transversaal* van een driehoek is een lijn die de (verlengden van de) zijden van een driehoek snijdt en *niet* door een hoekpunt van die driehoek gaat.
[7] Voor een behandeling van de Stelling van Desargues zie [*b*, pp. 5-7], [*c1*] of [*d*, pp. 428-429].

Literatuur

[*a*] R.A. Johnson: *Advanced Euclidean Geometry*. New York: Dover Publications Inc. (1960, reprint).
[*b*] Martin Kindt: *Lessen in projectieve meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (1996).
[*c*] Dick Klingens: *Homepage*. Op: *www.pandd.demon.nl*. Webpagina's op deze website waarnaar in dit artikel wordt verwezen zijn:
[*c1*] *www.pandd.demon.nl/transvers.htm#74*
[*c2*] *www.pandd.demon.nl/transvers.htm#6*;
[*c3*] *www.pandd.demon.nl/draaiverm.htm#12*
[*d*] P. Molenbroek: *Leerboek der Vlakke Meetkunde*. Groningen: P. Noordhoff N.V. (1939).
[*e*] Wim Pijls: *Gelijkvormigheid 1, 2*. In: Euclides 80(2 en 3), 2004; pp. 48-51, pp. 86-89.
[*f*] P. Wijdenes: *Vlakke meetkunde voor voortgezette studie*. Groningen: P. Noordhoff N.V. (1964).

Over de auteur

Dick Klingens is als leraar wiskunde verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van Euclides.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*
URL: *www.pandd.nl*

Dit artikel is ter publicatie aangeboden aan het tijdschrift Euclides, orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (april 2006).

