Over symmedianen

Dick Klingens

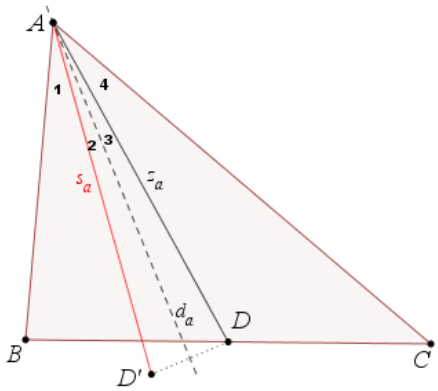
In het Nederlandse onderwijs – in de bovenbouw van het voorgezette én in het universitaire – wordt aan de vlakke synthetische meetkunde weinig aandacht meer besteed, en zeker niet aan een onderwerp als symmedianen. In dit artikel probeer ik aan dit laatste iets te doen.

1. Een eerste eigenschap

Symmedianen zijn rechte lijnen die thuishoren in de zogeheten driehoeksmeetkunde. Ze behoren tot de grote verzameling lijnen die *hoektransversalen* (ook wel *cevianen*) worden genoemd: lijnen die gaan door de hoekpunten van de driehoek én de derde zijde van die driehoek snijden.

Definitie. Een **symmediaan** van een driehoek is het spiegelbeeld van een zwaartelijn in de bissectrice van de betreffende hoek van die driehoek. ◊

figuur 1

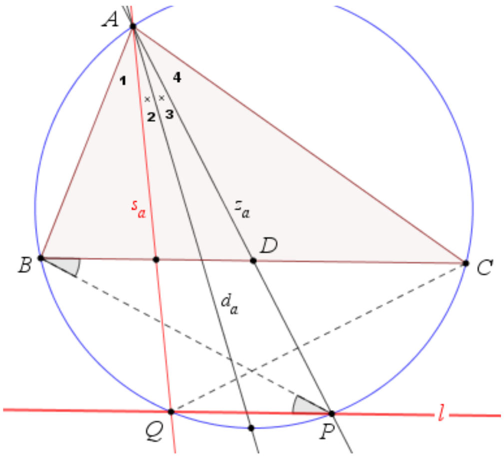


In figuur 1 is d_a de (binnen)bissectrice van hoek A en is $z_a \equiv AD$ de zwaartelijn naar de zijde BC, waarvan het punt D het midden is.
De lijn $s_a \equiv AD'$ is de symmediaan van hoek A, en wordt ook wel de A-symmediaan genoemd; D' is het spiegelbeeld van D in d_a.

Gevolg. Op grond van de definities van symmediaan en bissectrice is nu:

- $\angle A_{12} = \angle A_{34}$
- $\angle A_2 = \angle A_3$
- $\angle A_1 = \angle A_4$ ◊

figuur 2



In figuur 2 snijden de zwaartelijn z_a en de symmediaan s_a de omcirkel van driehoek ABC in de punten P en Q.
Omdat $\angle A_1 = \angle A_4$ is, is bg(PC) = bg(QB); het zijn immers omtrekshoeken op dezelfde cirkel.
Dan is ook:

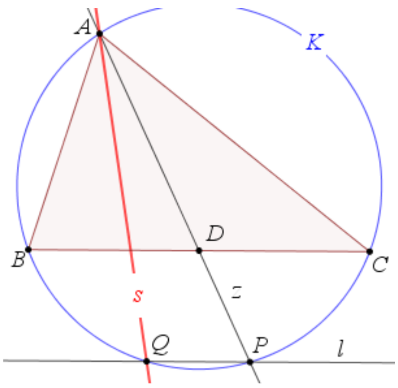
- $\angle PBC = \angle BPQ$ (omtrekshoeken)

En daarmee is $l \equiv PQ$ evenwijdig met BC (Z-hoeken).

Als stelling geformuleerd:

Stelling 1. De snijpunten van een zwaartelijn en diens symmediaan met de omcirkel van een driehoek zijn de eindpunten van een koorde van die omcirkel die evenwijdig is met de overstaande zijde van het betreffende hoekpunt. ◊

figuur 3



Opmerking. Op stelling 1 kan een eenvoudige constructie van de symmedianen van een driehoek worden gebaseerd; en dat is eigenlijk de enige reden voor de behandeling van stelling 1.

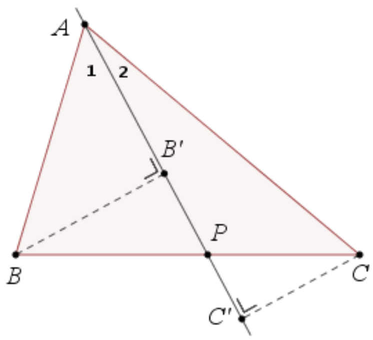
Ik ga voor de bedoelde constructie uit van een in ligging en grootte gegeven driehoek ABC en ik gebruik een dynamisch-meetkundeprogramma (DMP; zoals *GeoGebra* [1]).

De constructiestappen zijn [1]:

1. K = Omcirkel(A, B, C)
2. D = Midden(B, C)
3. z = RechteLijn(A, D)
4. $P = K$ & z
5. l = EvenwijdigeLijn(P, BC)
6. $Q = K$ & l
7. s = RechteLijn(A, Q)

De lijn s is dan de A-symmediaan. ◊

Een lemma – In dit artikel zal ik een enkele keer gebruik maken van het hierna geformuleerde lemma, waaraan ik zal refereren met de (niet algemeen gebruikte) naam **verhoudingsstelling**, omdat de eigenschap iets zegt over de verhouding van twee deellijnstukken op een zijde van een driehoek:



Lemma (verhoudingsstelling). Voor een (willekeurig) punt P op de zijde BC van driehoek ABC geldt:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(A_1)}{\sin(A_2)}$$

Bewijs. De driehoeken $BB'P$ en $CC'P$ zijn gelijkvormig (hh), zodat:
- $BP : CP = BB' : CC'$

En ook is:
- $\sin(A_1) = BB'/AB$ en $\sin(A_2) = CC'/AC$ of:
- $BB' = AB \cdot \sin(A_1)$ en $CC' = AC \cdot \sin(A_2)$

En daaruit volgt het gestelde. ◊

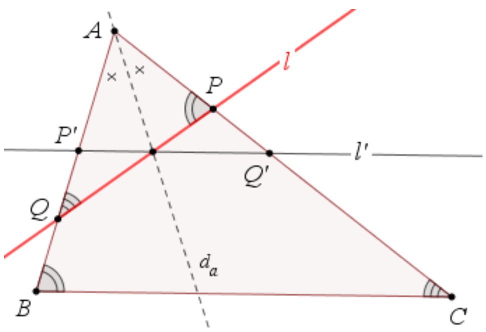
Opmerking. Is AP de bissectrice van hoek A, dan volgt uit dit lemma dat $PB : PC = AB : AC$; en dat is de *bissectricestelling* in een driehoek. ◊

2. Antiparallel

Het begrip symmediaan hangt ten nauwste samen met een ander begrip in de driehoeksmeetkunde, namelijk het *antiparallel* zijn van twee lijnen. Dit laatste begrip wordt meestal gedefinieerd met behulp van twee paren rechte lijnen. [2]
In dit artikel, dat specifiek over driehoeksmeetkunde gaat, geef ik een definitie met behulp van een driehoek.

Definitie. Een lijn l is **antiparallel** aan een zijde van een driehoek als het beeld l' van l in de bissectrice van de tegenoverliggende hoek van de betreffende zijde, evenwijdig is met die zijde. ◊

figuur 4a



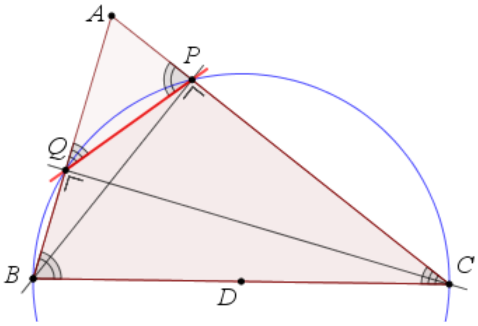
In figuur 4a is de lijn l die AC en AB opvolgend in P en Q snijdt, antiparallel aan BC omdat:
- l' het beeld is van l bij spiegeling in d_a, én daarbij
- l' evenwijdig is met BC.

Gevolg. Met P' en Q' als beelden van P en Q bij de spiegeling in d_a zijn de driehoeken APQ en $AP'Q'$ congruent (ZZZ).
Daaruit blijkt dat:
- $\angle APQ = \angle AP'Q' = \angle B$
- $\angle AQP = \angle AQ'P' = \angle C$ ◊

Opmerking. Bij nadere beschouwing van vierhoek $BCPQ$ in figuur 4 is die vierhoek een koordenvierhoek.

Een bijzondere koordenvierhoek in dit verband is de vierhoek $BCPQ$ door de voetpunten P, Q van de B- en C-hoogtelijnen (middelpunt D, het midden van BC); zie figuur 4b.

figuur 4b

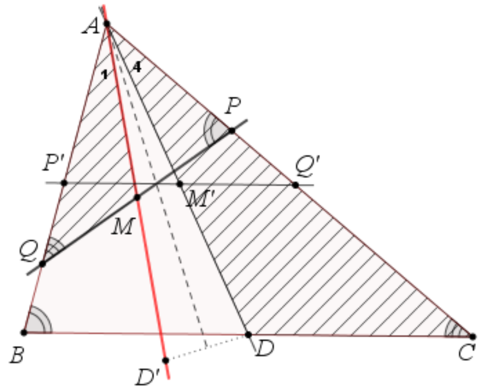


Ook in dit geval is PQ antiparallel aan de zijde BC van de driehoek.
En dan zijn natuurlijk *alle* lijnen die evenwijdig zijn met PQ, antiparallellen aan BC.

In de literatuur wordt deze eigenschap ook wel als definitie van het begrip antiparallel gebruikt. ◊

De antiparallellen aan bijvoorbeeld BC spelen ook een rol bij, in dit geval, de A-symmediaan van driehoek ABC; ik merkte dit al eerder op. Ik bekijk die rol in figuur 5a.

figuur 5a



De lijn PQ is een willekeurige antiparallel aan BC. M is het midden van het lijnstuk PQ.
Het beeld van M bij spiegeling in de A-bissectrice is dan het midden M' van het lijnstuk $P'Q'$ dat evenwijdig is met BC.
Het punt M' ligt daardoor ook op de A-zwaartelijn.

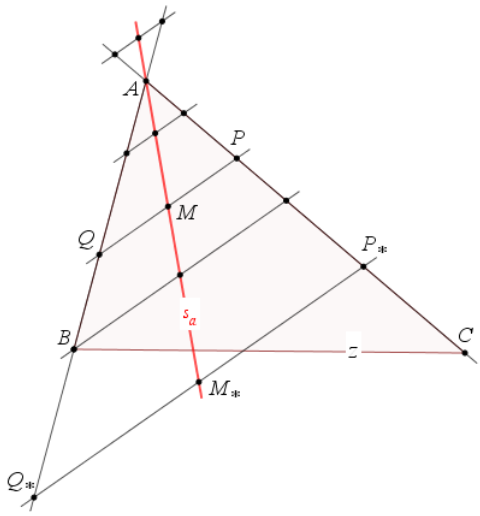
En daaruit volgt dan direct dat de lijn AM de symmediaan van de driehoek is door het hoekpunt A. Immers, de A-symmediaan is het beeld van de A-zwaartelijn bij die spiegeling.

Deze laatste conclusie kan echter ook bewezen worden *zonder* gebruik te maken van de spiegeling in de A-bissectrice.
Uit de gelijke hoeken van de driehoeken ABC en APQ volgt de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken.
Zodat:
- $BC : PQ = AC : AQ$ of ook: $\tfrac{1}{2}BC : \tfrac{1}{2}PQ = AC : AQ$

Met andere woorden:
- $DC : MQ = AC : AQ$

En omdat ook $\angle DCA = \angle PAQ$ is, zijn de driehoeken ADC en AMQ gelijkvormig (*zhz*).
En uit deze gelijkvormigheid volgt: $\angle A_4 = \angle A_1$.
Waarmee nu opnieuw is aangetoond dat de lijn AM het spiegelbeeld is van de zwaartelijn AD in de bissectrice van hoek A van driehoek ABC.

figuur 5b



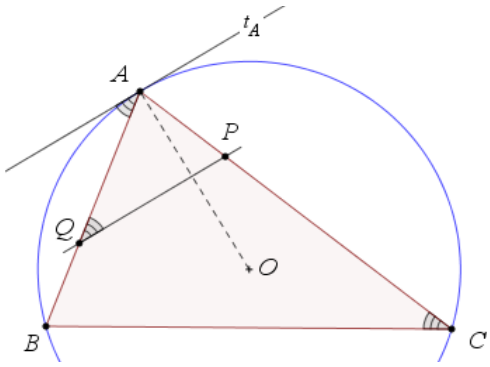
Hiermee is bewezen (zie figuur 5b):

Stelling 2. Snijdt een lijn die antiparallel is aan een zijde z van een driehoek, de beide andere zijden (of het verlengde van zo'n zijde) in de punten P en Q, dan is de symmediaan naar de zijde z de meetkundige plaats van de middens M van het lijnstuk PQ als P (of Q) de zijde van de driehoek doorloopt. ◊

Een gevolg van een en ander is ook:

Stelling 3. Een lijn die antiparallel is aan de zijde van een driehoek is evenwijdig met de raaklijn aan de omcirkel van die driehoek in het overstaande hoekpunt van de zijde. ◊

figuur 6



Bewijs. In figuur 6 is de lijn PQ antiparallel aan BC.
Dit houdt onder meer in dat:
- $\angle PQA = \angle C$

Bij de raaklijn t_A in A aan de omcirkel van de driehoek geldt:
- $\angle(t_A, AB) = ½\text{bg}(AB)$

Maar ook is $\angle C = ½\text{bg}(AB)$, zodat:
- $\angle(t_A, AB) = \angle PQA$

Conclusie: $PQ \,//\, t_A$ ◊

4. Andere eigenschappen

Stelling 4

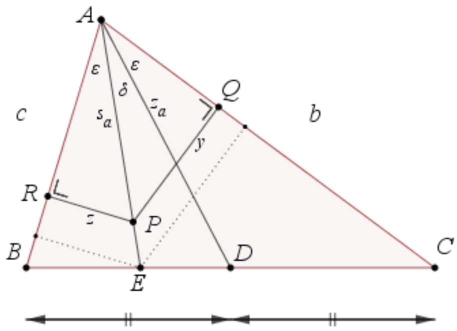
4.1. Een symmediaan verdeelt de overstaande zijde in stukken die zich verhouden als de kwadraten van de (lengtes van de) 'opstaande' zijden. [3]
4.2. De afstanden van een punt van een symmediaan tot de 'opstaande' zijden verhouden zich als (de lengtes van) die opstaande zijden (in dezelfde volgorde). ◊

Bewijs. **4.1.** De A-symmediaan snijdt de zijde BC in het punt E. Conform het gestelde moet nu bewezen worden dat $BE : CE = c^2 : b^2$.
Zie figuur 7a. Zij D het midden van de zijde BC. Dan is, met Φ als oppervlaktefunctie [4]:

$$\frac{BE}{CE} = (\text{omdat } CD = BD)\frac{BE}{CD}\cdot\frac{BD}{CE} = \frac{\Phi(ABE)}{\Phi(ADC)}\cdot\frac{\Phi(ABD)}{\Phi(AEC)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot c\cdot s_a\cdot\sin(\varepsilon)}{\frac{1}{2}\cdot b\cdot z_a\cdot\sin(\varepsilon)}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot c\cdot z_a\cdot\sin(\varepsilon+\delta)}{\frac{1}{2}\cdot s_a\cdot b\cdot\sin(\varepsilon+\delta)} = \frac{c^2}{b^2}$$

figuur 7a



4.2. Zie opnieuw figuur 7a. Met P op s_a en met Q en P als loodrechte projecties van P op de opstaande zijden, waarbij $PQ = y$ en $PR = z$, geldt:
- $\Phi(AEC) = ½ \cdot y \cdot b \cdot AE/AP$
- $\Phi(ABE) = ½ \cdot z \cdot c \cdot AE/AP$

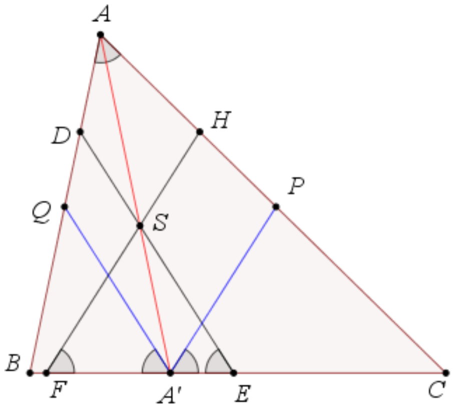
Volgens stelling 4.1 is: $\dfrac{\Phi(AEC)}{\Phi(ABE)} = \dfrac{CE}{BE} = \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{yb}{zc}$

Daaruit blijkt:
- $PQ : PR = y : z = b : c$ ◊

Opmerkingen. **1.** De lezer kan door omkering van de beide bewijzen nagaan dat ook de omkering van de beweringen in stelling 4.1 en in stelling 4.2 juist zijn.
2. Stelling 4.1 kan ook worden afgeleid met de *verhoudingsstelling*. Zie voor een dergelijke afleiding §1 in de Appendix.
3. De eigenschap van stelling 4.2 wordt wel de *karakteristieke eigenschap* van (de punten van) een symmediaan genoemd.
4. Zie verder ook de opmerking na stelling 8 (in paragraaf 5) voor een tweede bewijs van stelling 4.2. ◊

Gevolg van stelling 4.1. Als twee antiparallellen aan twee zijden van een driehoek dezelfde lengte hebben én elkaar snijden, dan ligt hun snijpunt op de symmediaan naar de derde zijde. ◊

figuur 7b



Bewijs. In figuur 7b zijn DE, FH antiparallel aan AC, AB, waarbij verder $DE = FH$.
Ook: DE & $FH = S$, AS & $BC = A'$.

Ik zal bewijzen dat AA' een symmediaan van de driehoek is.

Nu is op grond van de antiparallelliteit:
- $\angle HFC = \angle A = \angle DEB$

En dan blijkt dat driehoek FES gelijkbenig is (top S). Dus:
- $FS = ES$, $SH = SD$

Verder zijn $A'P$, $A'Q$ evenwijdig met FH, ED. In de driehoeken AQA' en APA' is nu op grond van de eerste stelling van Thales (evenwijdigheid):
- $DS : QA' = AS : AA' = HS : PA'$

Uit $DS = HS$ volgt dan $A'Q = A'P$ (*)
Verder is driehoek $BA'Q$ gelijkvormig met driehoek BAC (hh) en driehoek $CA'P$ gelijkvormig met driehoek CAB (hh), zodat:
- $BA' : \underline{A'Q} = BA : AC = c : b$
- $\underline{A'P} : A'C = AB : AC = c : b$

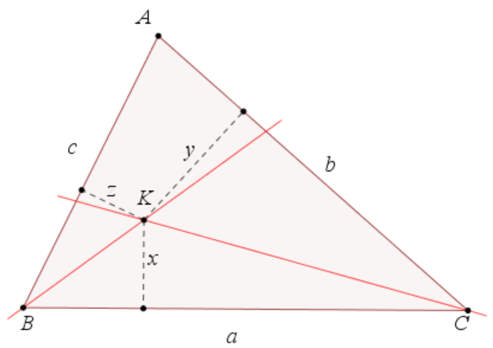
Na vermenigvuldiging van de rechterleden en de linkerleden waarbij rekening gehouden wordt met (*) blijkt:
- $BA' : CA' = c^2 : b^2$

Op grond van stelling 4.1 is dan A' als punt van BC ook een punt van de A-asymptoot van de driehoek. ◊

Opmerking. Voor een gevolg van het gevolg van stelling 4.1 (en van de hierna volgende stelling 5) zie paragraaf 6, Lemoine-cirkels. ◊

Stelling 5. De symmedianen van een driehoek snijden elkaar in hetzelfde punt.
Dit punt wordt het **Lemoine-punt** [5] of **symmediaanpunt** van de driehoek genoemd. ◊

figuur 8



Bewijs. In figuur 8 is het punt K het snijpunt van de B- en C-symmediaan van driehoek ABC.
Voor de afstanden x, y, z van K tot de zijden van de driehoek geldt dan volgens stelling 4.2:
- (BK) $z : x = c : a$ of $za = xc$
- (CK) $x : y = a : b$ of $xb = ya$

Vermenigvuldiging van de linker en rechter leden van de producten geeft dan:
- $zaxb = xcya$

Zodat na deling door ax blijkt dat:
- $zb = cy$ of $y : z = b : c$

Met andere woorden: het punt K ligt óók op de A-symmediaan (volgens de karakteristieke eigenschap). ◊

Gevolg. Blijkbaar is nu $x : y : z = a : b : c$, zodat er een getal k (reëel, positief) bestaat waarvoor:
- $x = ka$, $y = kb$, $z = kc$

Nu is $\Phi = \Phi(ABC) = ½(xa + yb + zc) = ½(ka^2 + kb^2 + kc^2)$ waaruit k kan worden berekend:

$$k = \frac{2\Phi}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Dan is:

$$x^2+y^2+z^2=k^2(a^2+b^2+c^2)=\frac{4\Phi^2}{a^2+b^2+c^2}$$

De *identiteit van Langrange* [6], geldend voor reële getallen x, y, z, a, b, c (hier met $n = 3$) luidt:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2+(cy-bz)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

En hieruit volgt dat:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\ \geq\ (ax+by+cz)^2=4\Phi^2$$

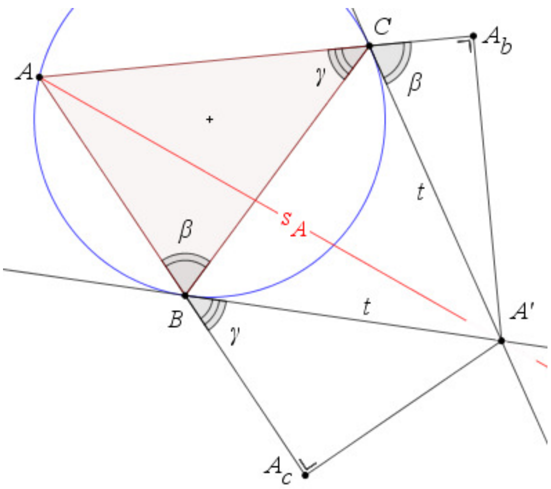
waarbij het gelijkteken in de ongelijkheid alléén geldt als $x : y : z = a : b : c$ (daarmee zijn de laatste drie termen in de identiteit gelijk aan 0).

Met x, y, z als afstanden van K tot de zijden van de driehoek is nu aangetoond:

Stelling 6. Voor het Lemoine-punt van een driehoek is de som van de kwadraten van de afstanden tot de zijden minimaal. ◊

Stelling 7. Een symmediaan van een driehoek gaat door het snijpunt van de raaklijnen in de beide ‘andere’ hoekpunten aan de omcirkel van die driehoek. ◊

figuur 9a



In figuur 9a is s_A de symmediaan van A.
De raaklijnen in B en C aan de omcirkel van driehoek ABC snijden elkaar in A'.
Er moet nu aangetoond worden dat s_A door A' gaat.

Bewijs. A_b en A_c zijn de loodrechte projecties van A' op de zijden AC en AB.
Daardoor is:

- $\beta = \angle CBA = ½\text{bg}(AC) = \angle A'CA_b$
- $\gamma = \angle ACB = ½\text{bg}(AB) = \angle A_cBA'$

Met $A'B = A'C = t$ (raaklijnstuk uit A') is dan in de driehoeken $A'A_bC$ en $A'BA_c$:

$$\sin\beta=\frac{A'A_b}{t}\quad\text{en}\quad\sin\gamma=\frac{A'A_c}{t}$$

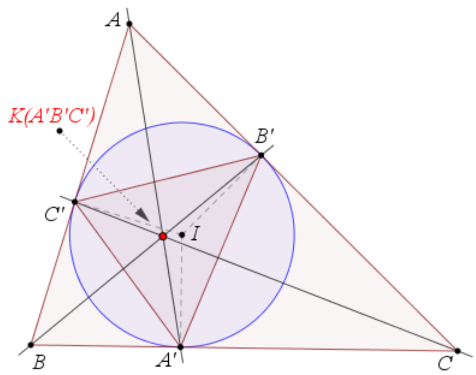
Gebruikmakend van de *sinusregel* in driehoek ABC is: $A'A_b : A'A_c = \sin\beta : \sin\gamma = b : c$.
Conform stelling 4.2 ligt dan A' op de A-symmediaan; immers, $A'A_b$ en $A'A_c$ zijn de afstanden van A' tot de omliggende zijden van hoek A. ◊

Opmerking. In de analytische meetkunde (en niet alleen daar) wordt BC de **poollijn** van A' bij de omcirkel van driehoek ABC genoemd; het punt A' is dan de **pool** van de lijn BC. Met deze terminologie is stelling 7 te verwoorden als:

Stelling 7bis. Een symmediaan van een driehoek gaat door de pool van overstaande zijde ten opzichte van de omcirkel van die driehoek. ◊

Gevolg

figuur 9b



Zie figuur 9b.

Stelling 7b. Zijn A', B', C' de raakpunten van de incirkel van driehoek ABC, dan zijn de lijnen $A'A$, $B'B$, $C'C$ de symmedianen van driehoek $A'B'C'$. ◊

Bewijs. De lijn AA' gaat door het snijpunt van de raaklijnen in B' en C' aan de *omcirkel* van driehoek $A'B'C'$ (zijnde de *incirkel* van driehoek ABC) en is daarmee volgens stelling 7 een symmediaan van $A'B'C'$.
Analoog geldt dit voor BB' en CC'. ◊

5. Bijzonder

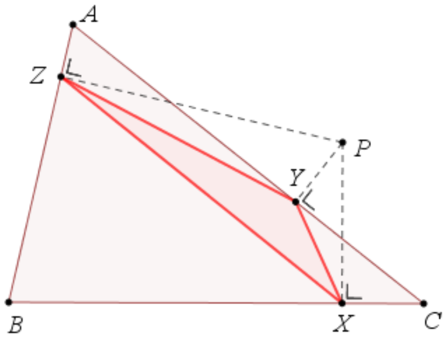
Ik laat in deze paragraaf nog enkele bijzondere eigenschappen van de symmedianen volgen.

A.

Allereerst een definitie van een bijzondere driehoek bij een punt en een driehoek.

Definitie. De **voetpuntsdriehoek van een punt** [7] bij een driehoek is de driehoek waarvan de hoekpunten de voetpunten zijn van de loodlijnen uit dat punt op de (verlengde) zijden van die driehoek. ◊

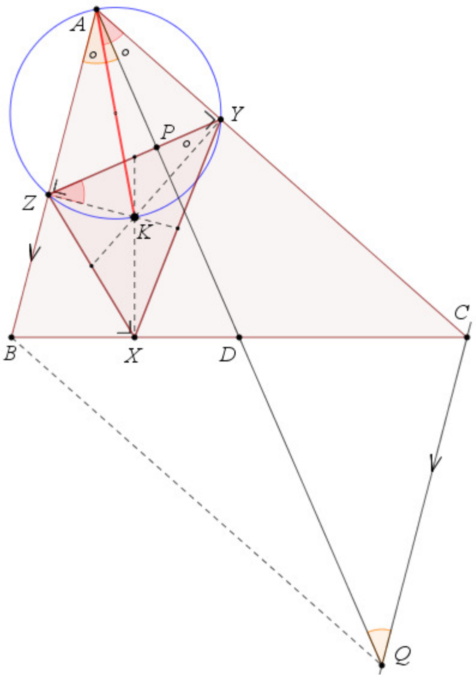
figuur 10a



In figuur 10a is P een willekeurig punt en zijn X, Y, Z de loodrechte projecties van P op de zijden van driehoek ABC.
Nu is driehoek XYZ de zogeheten voetpuntsdriehoek van P bij driehoek ABC.[8]

Ik zal nu bewijzen:

figuur 10b



Stelling 8. De voetpuntsdriehoek van het Lemoine-punt van een driehoek heeft dat punt als zwaartepunt. ◊

Bewijs. In figuur 10b is K het Lemoine-punt van driehoek ABC.
X, Y, Z zijn de projecties van K op de zijden.
Ik zal aantonen dat K het zwaartepunt is van driehoek XYZ, in eerste instantie door te bewijzen dat de lijn XK een zwaartelijn van driehoek KYZ is.

D is het midden van BC. Het lijnstuk AD, dat YZ snijdt in P wordt verlengd met $DQ = AD$.
Daarmee is CQ evenwijdig met AB ($ABQC$ is dan immers een parallellogram).
En vierhoek $AZKY$ is een koordenvierhoek (met middellijn AK; twee *Thales-driehoeken* op AK).

Nu is in die koordenvierhoek, kijkend naar de driehoeken APY en AZK:
- $\angle AYZ = ½\text{bg}(AZ) = \angle AKZ$
- $\angle YAP = \angle KAZ$ (symmediaan; per definitie)

Daaruit volgt de gelijkvormigheid van de beschouwde driehoeken (*hh*), zodat ook hun derde hoeken gelijk zijn:
- $\angle APY = \angle AZK = 90^\circ$

De zwaartelijn AD van driehoek ABC staat dus in P loodrecht op de zijde YZ van de voetpuntsdriehoek.

Ook is in vierhoek $AZKY$:
- $\angle \underline{YZK} = ½\text{bg}(YK) = \angle YAK = \angle BAQ$

En omdat $CQ \parallel AB$ is, is ook:
- $\angle BAQ = \angle \underline{AQC}$, waardoor $\angle YZK = \angle AQC$

Maar ook is $\angle KYZ = ½\text{bg}(KZ) = \angle KAZ$.
Dus zijn de driehoeken AQC en YZK gelijkvormig (*hh*). Van de zijden van deze twee driehoeken is nu bekend:
$AQ \perp YZ$, $AC \perp YK$, $QC \perp ZK$ (dit laatste omdat $QC \parallel AB$)
Overeenkomstige lijnen in beide driehoeken staan daardoor óók loodrecht op elkaar.

Omdat de zwaartelijn CD van driehoek ABC loodrecht staat de lijn KX, is KX nu een zwaartelijn van driehoek YZK (AQ en YZ zijn overeenkomstige zijden), en daarmee dus ook van driehoek XYZ. En dit laatste geldt, analoog, natuurlijk ook voor de lijnen KY en KZ, waarmee K inderdaad het zwaartepunt is van driehoek XYZ. ◊

Opmerking. Uit de hierboven bewezen gelijkvormigheid van de driehoeken AQC en YZK, volgt – weer gebruik makend van $CQ = AB$:

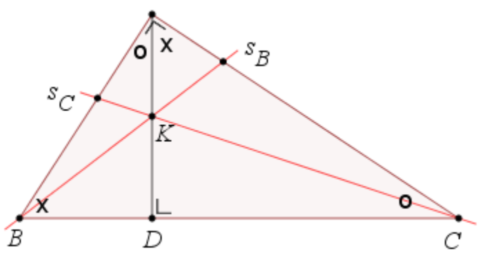
- $KY : CA = KZ : CQ \quad \Rightarrow \quad KY : KZ = CA : AB \quad \Rightarrow \quad KY : KZ = b : c$

Waarmee een tweede bewijs is gegeven van stelling 4.2 (de karakteristieke eigenschap van de symmedianen).

B.

Stelling 9. In een in A rechthoekige driehoek ABC valt het Lemoine-punt K samen met het midden van het loodlijnstuk uit A. ◊

figuur 11



Bewijs. Zoals gemakkelijk is in te zien geldt nu:

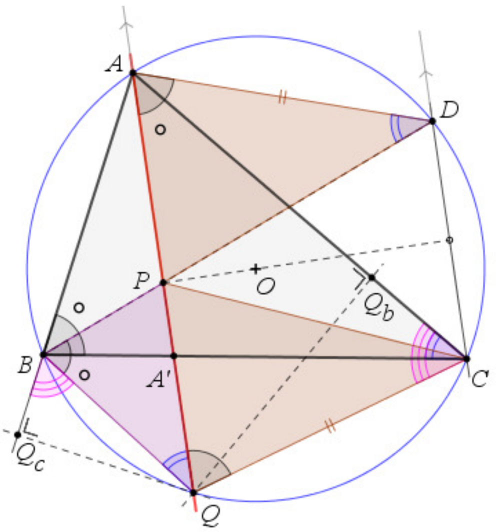
- AD is antiparallel aan AB;
- AD is antiparallel aan AC.

De B-symmediaan en de C-symmediaan gaan dan beide door het midden van het lijnstuk AD (volgens stelling 2). Hun snijpunt K is dan het midden van AD. ◊

C.

In de volgende alinea's zal ik enkele symmediaan-eigenschappen behandelen, die niet direct in stellingen zijn te vatten.
Ik ga uit van figuur 12.

figuur 12



Gegeven is driehoek ABC met omcirkel; O is het middelpunt van die cirkel.
De lijn AQ is de A-symmediaan.
De lijn CD is evenwijdig met de lijn AQ.
De lijn DB snijdt AQ in het punt P.
QQ_b en QQ_c zijn loodlijnstukken uit Q op de zijden AC en BD van de driehoek.

Een leuke opdracht voor de lezer zou hierbij de volgende kunnen zijn.
Zoek *alle* gelijkvormige driehoeken in figuur 12 en bewijs de juistheid van hetgeen gevonden is.

Als de lezer die opdracht aanneemt, moet hij vanaf hier natuurlijk *niet* verder lezen! Dat kan eventueel vanaf het teken Ξ hierna.

Ik bekijk eerst de driehoeken PBQ en APD (omdat die driehoeken in ieder geval hoek P gemeenschappelijk hebben) en uiteraard ook driehoek ABC.
Er geldt – en het is allereerst gewoon een kwestie van 'hoeken jagen':

- $\frac{1}{2}\text{bg}(AB) = \angle ADB = \angle ACB = \angle AQB$
- $\frac{1}{2}\text{bg}(\underline{CDA}) = \angle \underline{CQA} = \angle CBA$

Omdat vierhoek $AQCD$ een gelijkbenig trapezium is (dat is triviaal), is ook:

- $\frac{1}{2}\text{bg}(\underline{CDA}) = \angle \underline{CQA} = \angle DAG$

En ook is:

- $\frac{1}{2}\text{bg}(DCQ) = \angle DBQ = \angle DAQ$

- ½bg(AD) = $\angle ABD$ = ½bg(CQ) = $\angle CBQ = \angle CAQ$

En dan blijkt uit dit alles:

(*) $\Delta PBQ \sim \Delta PAD \sim \Delta ABC$ (hh)

Ik merk hierbij op dat deze relatie onafhankelijk is van het feit of AQ wel of niet de symmediaan is van hoek A. Er is immers geen gebruik gemaakt van een hoekeigenschap van symmedianen.

Nadere beschouwing van de hoeken rond B en de hoeken in driehoek AQC leert nu dat:
- $\angle QBQ_c = \angle QCQ_b$

En nú pas gebruik ik de karakteristieke eigenschap van de A-symmediaan (zie stelling 4.2):
- $QQ_c : QQ_b = c : b$

En daarmee volgt uit $\sin(QBQ_c) = \dfrac{QQ_c}{QB}$ en $\sin(QCQ_b) = \dfrac{QQ_b}{QC}$ dat ook:
- $QB : QC = \underline{c : b}$

Uit $\Delta PBQ \sim \Delta ABC$ (zie **(*)**) volgt dat $PB : PQ = AB : AC = \underline{c : b}$ is. Zodat:
- $QB : QC = PB : PQ$ of ook $QB : PB = CQ : PQ$

En dan zijn ook de driehoeken PBQ en PQC gelijkvormig (zhz)!

Ξ

Uit die gelijkvormigheid volgen dan nog wat andere eigenschappen in de configuratie van figuur 12.

1. $\angle BPQ = \angle QPC$; met andere woorden: PQ is de bissectrice van $\angle BPC$.
2. Omdat $\angle BPQ = \angle BAC = \angle A$ (zie **(*)**) is, is $\angle BPC = 2\angle A$.
3. De driehoeken PQC en PAD zijn gelijkvormig. Ze zijn dus congruent en elkaars spiegelbeeld in PO!
4. En dan is $PQ = PA$ en $PD = PC$, zodat het punt P het midden is van het lijnstuk AQ en driehoek DPC gelijkbenig is met top P.
5. Koordeneigenschap (macht van P bij de cirkel):
   $PA \cdot PQ = PB \cdot PD$ of ook $PA^2 = PB \cdot PD$

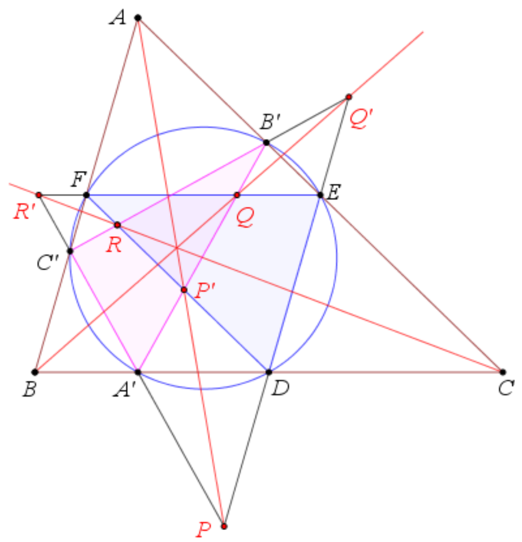
D.

Er is een verband tussen enerzijds de *voetpuntsdriehoek* en de *middendriehoek* van een driehoek en anderzijds de symmedianen van de laatste driehoek.

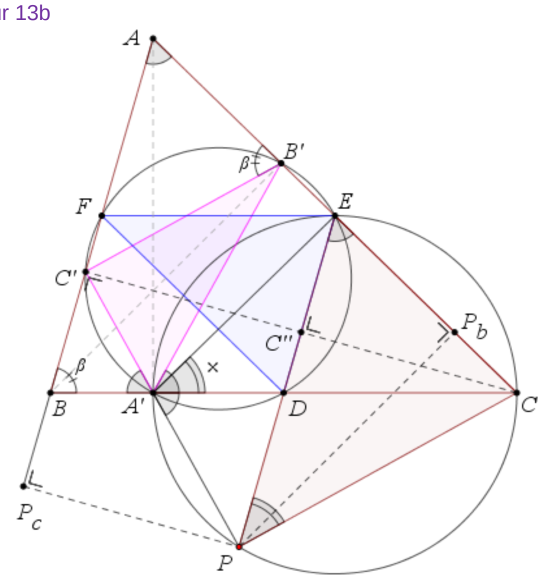
De voetpuntsdriehoek van driehoek ABC wordt in figuur 13a bepaald door de voetpunten A', B', C' van de hoogtelijnen (niet getekend) en de middendriehoek door de middens D, E, F van de zijden van driehoek ABC.

Deze aan de basisdriehoek ‘toegevoegde’ driehoeken hebben dezelfde omcirkel, namelijk de zogeheten negenpuntscirkel.[9]

figuur 13a



figuur 13b



In figuur 13a is ook:

DE & $C'A' = P$, FD & $A'B' = P'$; EF & $A'B' = Q$, DE & $B'C' = Q'$; FD & $B'C' = R$, EF & $C'A' = R'$

En dan blijkt dat P en P' liggen op de A-symmediaan, Q en Q' op de B-symmediaan en R en R' op de C-symmediaan.
Ik zal in hetgeen volgt aantonen dat P op de A-symmediaan ligt. Zie daarvoor verder figuur 13b.
In die figuur zijn P_b en P_c de loodrechte projecties van het punt P op de zijden AC en AB van driehoek ABC. Ook zijn nu de hoogtelijnen van de driehoek weergegeven.

- $A'C'$ is antiparallel aan AC; dan is: $\angle C'A'B = \angle A = \alpha$.
- $A'B'$ is antiparallel aan AB; dan is $\angle B'A'C = \alpha$.

Daarmee is vierhoek $PCEA'$ een koordenvierhoek, immers ook $\angle PEC = \alpha$ (omdat $DE \,//\, BA$).
En daaruit volgt dat $\angle CPE = \angle CA'E$.
Ik merk nu op dat vierhoek $A'EB'C'$ een koordenvierhoek is (binnen de negenpuntscirkel); en daaruit volgt (onder andere) dat:

- $\angle C'A'E = 180^\circ - \angle C'B'E = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta$

Stel nu $\angle EA'C = x$.

Voor de waarde van x volgt dan uit de waarden van de hoeken rond A':

- $x = 180^\circ - (\alpha + \angle C'A'E) = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \gamma = \angle C$

En dan is $\angle EPC = ½\text{bg}(EC) = x = \angle C$
Gevolg: de driehoeken ABC en ECP zijn gelijkvormig (*hh*).
Ik kijk nu naar *overeenkomstige* hoogtelijnen in deze driehoeken.

- In driehoek ABC is $BB' : CC' = c : b$ (de hoogtelijnen zijn omgekeerd evenredig met de zijden [10]).
- In driehoek ECP is op basis daarvan $CC'' : PP_b = c : b$.

En dan is verder $CC' = C'C'' = PP_c$; dus is $PP_c : PP_b = c : b$.
En op grond van de karakteristieke eigenschap van de symmedianen (stelling 4.2) ligt het punt P dan op de A-symmediaan.

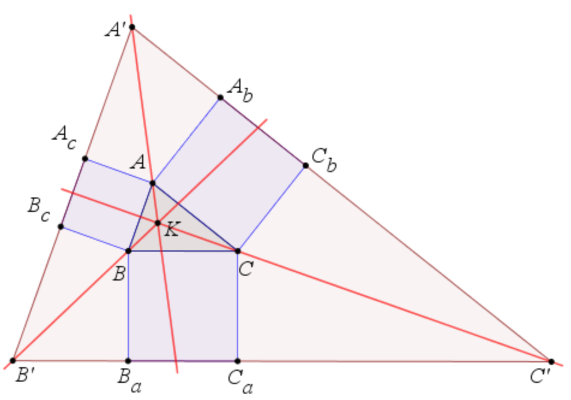
E. De constructie van Grebe

Ernst Wilhelm Grebe (1804-1874, Duitsland) publiceerde in 1847 een negen pagina's tellend artikel onder de titel "Das geradlinige Dreieck in Bezug auf die Quadrate der Perpendikel, die man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten faellen kann" (in: *Archiv der Mathematik und Physik*, ook wel *Grünerts Archiv*, nr. 9, pp. 250-259).

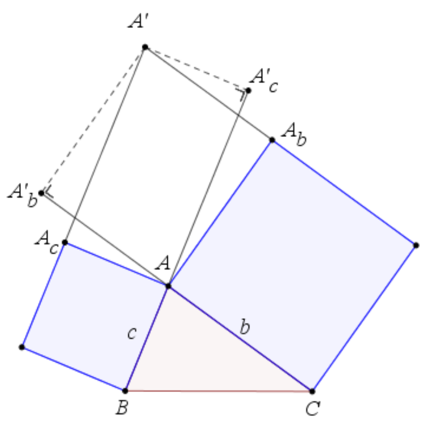
In dat artikel bewees Grebe onder meer de volgende stelling (hier stelling 10):

Stelling 10. Op de zijden van driehoek ABC zijn buitenwaarts (uitwendig) vierkanten geconstrueerd. De dragers van de zijden van de vierkanten die evenwijdig zijn met de zijden van driehoek ABC vormen een driehoek $A'B'C'$ waarvan de verbindingslijnen van A', B', C' met opvolgend A, B, C concurrent zijn. Hun snijpunt K is het Lemoine-punt van driehoek ABC; zie figuur 14a. ◊

figuur 14a



figuur 14b



Bewijs. Ik toon de karakteristieke eigenschap (stelling 4.2) van de symmedianen aan voor het punt A'. Zie daartoe figuur 14b.
A'_c en A'_b zijn de loodrechte projecties van het punt A' op de zijden AB en AC. [11]

- $d(A', AB) = A'A'_c = AA_c = c$
- $d(A', AC) = A'A'_b = AA_b = b$

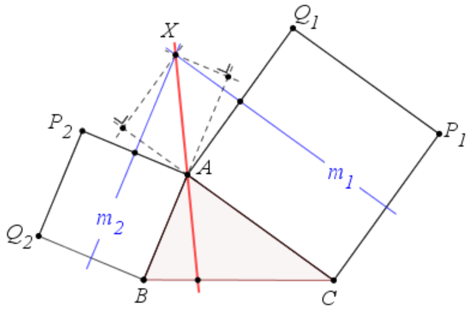
zodat:

- d(A', AB) : d(A', AC) = $c : b$

En daarom ligt A' op de A-symmediaan.
Analoog ligt B' op de B-symmediaan en C' op de C-symmediaan van driehoek ABC.
De lijnen AA', BB', CC' zijn dus, omdat het symmedianen zijn, concurrent in het Lemoine-punt K van driehoek ABC. ◊

Opmerkingen. **1.** Het symmediaanpunt werd op voorstel van E. Hain (in zijn artikel “Ueber den Grebeschen Punkt” in *Archiv der Mathematik und Physik*, 1876, pp. 84-89) naar Grebe genoemd: das Grebe’sche Punkt.
2. De constructie van het punt K met behulp van vierkanten op twee zijden van een driehoek staat in de wiskundige literatuur bekend als de *constructie van Grebe*.

figuur 14c



De constructie van, bijvoorbeeld, de A-symmediaan van driehoek ABC, die in ligging en grootte gegeven is, kan worden uitgevoerd als in figuur 14c.

Constructiestappen

1. P_1, Q_1 = RegelmatigeVeelhoek(A, C, 4)
2. P_2, Q_2 = RegelmatigeVeelhoek(B, A, 4)
3. m_1 = Middelloodlijn(A, Q_1)
4. m_2 = Middelloodlijn(A, P_2)
5. $X = l_1$ & l_2
6. A-*symmediaan* = Lijn(A, X)

Dat X dan een punt van de A-symmediaan van driehoek ABC is, moet uiteraard bewezen worden.

Bewijs. d(X, AB) = ½AP_2 = ½c; d(X, AC) = ½AQ_1 = ½b. Dan is:

- d(X, AB) : d(X, AC) = $c : b$ ◊

Stelling 11. Het punt K uit stelling 10 is tevens het Lemoine-punt van driehoek $A'B'C'$. ◊

Bewijs. Het is direct duidelijk dat de driehoeken ABC en $A'B'C'$ gelijkvormig zijn, immers:

- de overeenkomstige zijden van de driehoeken zijn evenwijdig;
- de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten (AA', …) zijn concurrent.

Daarmee worden gelijkvormigheidseigenschappen overgedragen op bissectrices en zwaartelijnen en ook op bijvoorbeeld lijnspiegelingen.
Waaruit het gestelde volgt. ◊

Stelling 12. (Stelling van Grebe) Voor de gelijkvormigheidsfactor f van driehoek ABC *naar* driehoek $A'B'C'$ geldt:

$$f = 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\Phi}$$

waarbij a, b, c de lengtes van zijden van ABC zijn en Φ de oppervlakte van die driehoek. ◊

Bewijs. In het gevolg van stelling 5 is gevonden dat voor de afstand x van het Lemoine-punt K tot de zijde BC van driehoek ABC geldt:

- $x = ka$ met $k = \dfrac{2\Phi}{a^2 + b^2 + c^2}$

De afstand van K tot $B'C'$ is (in figuur 14a) gelijk aan $x + a$. En op grond van hetgeen is opgemerkt in het bewijs van stelling 11, is dan:

$$f = \frac{x+a}{x} = \frac{ka+a}{ka} = 1 + \frac{1}{k} = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2\Phi}$$

Hetgeen bewezen moest worden. ◊

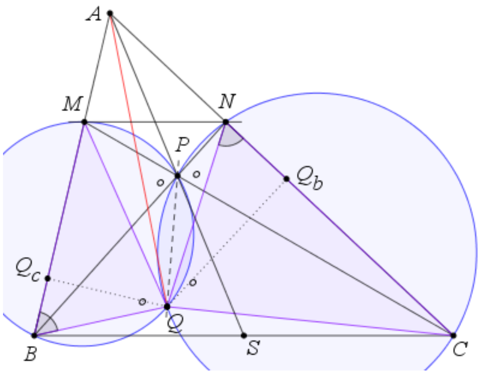
F. Een op een wiskunde-olympiade voorgelegde opgave

In 2009 werd aan de deelnemers van de 26ste Balkan Mathematical Olympiad (BMO; gehouden in Kragujevac, Servië) het volgende probleem voorgelegd:

> **2.** In a triangle ABC, points M and N on the sides AB and AC respectively are such that $MN \parallel BC$. Let BN and CM intersect at point P. The circumcircles of triangles BMP and CNP intersect at two distinct points P and Q. Prove that $\angle BAQ = \angle CAP$. *(Moldova)*

Maar er kan ook bewezen worden dat AQ een *symmediaan* is van driehoek ABC. En dat zal ik dan ook maar doen (ten eerste).

figuur 15



1. Zie figuur 15. De vierhoeken $MBPQ$ en $NCQP$ zijn koordenvierhoeken.
Dan is:

- $\angle BQM = ½\text{bg}(BM) = \angle BPM = \angle CPN = ½\text{bg}(CN) = \angle CQN$
- $\angle QBM = \angle QPC = ½\text{bg}(CQ) = \angle QNC$

En daarmee zijn de driehoeken BQM en NQC gelijkvormig (*hh*).
Uit die gelijkvormigheid volgt dat ook overeenkomstige bijzondere lijnstukken in beide driehoeken gelijkvormig zijn; zoals hoogtelijnen.
Zoals, met Q_b en Q_c als loodrechte projecties van Q op de zijden AC en AB van driehoek ABC:

- $QQ_b : NC = QQ_c : BM$

Maar omdat $MN \,//\, BC$ is, blijkt dat $QQ_b : QQ_c = CN : BM = CA : BA = b : c$
En dan is het punt Q volgens de karakteristieke eigenschap (stelling 4.2) een punt van de A-symmediaan. Dit wilde ik in eerste instantie aantonen.

2. Is nu verder $S = AP$ & BC.
De lijnen (cevianen) AS, BN en CM zijn concurrent in het punt P. Dan is volgens de stelling van Ceva [12]:

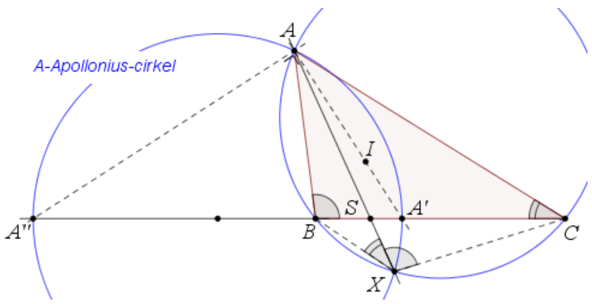
$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BS}{CS} \cdot \frac{CN}{AN} = -1$$

En omdat, ook weer vanwege $MN \,//\, BC$, $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AN}{CN}$ is, is $\dfrac{BS}{CS} = -1$. En dit betekent dat AS de A-zwaartelijn is van driehoek ABC.
En daaruit volgt, conform de definitie van de A-symmediaan, dat $\angle BAQ = \angle CAP$. ◊

G. Een punt van een Apollonius-cirkel op de omcirkel

Stelling 13. Geldt voor een punt X van de omcirkel van driehoek ABC dat $\dfrac{XB}{XC} = \dfrac{AB}{AC}$ is, dan is de lijn AX de A-symmediaan van de driehoek ABC. ◊

figuur 16



Bewijs. De gegeven verhouding voor het punt X houdt in dat X (ook) op de zogeheten A-Apollonius-cirkel ligt; dat is de cirkel die gaat door de snijpunten A' en A'' van de binnen- en buitenbissectrice van hoek A met de zijde BC. [13]
Zij verder $S = AX$ & BC.
Dan is in driehoek BCX volgens de *verhoudingsstelling* (zie paragraaf 1):
- $BS : CS = BX \cdot \sin(BXS) : CX \cdot \sin(CXS)$

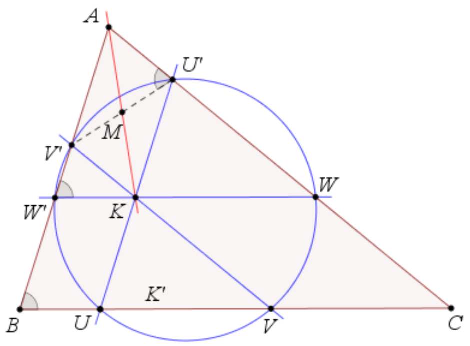
Voorts is $\angle BXS = \angle BXA = ½\text{bg}(AB) = \angle C$ en $\angle CXS = \angle CXA = ½\text{bg}(CA) = \angle B$
En dan vinden we de evenredigheid:
$$\frac{BS}{CS} = \frac{BX}{CX} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \text{(volgens het gegeven)} \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{\sin C}{AB} \cdot \frac{AC}{\sin B}$$
De twee laatste termen in het rechterlid zijn, volgens de *sinusregel* in driehoek ABC, elkaars omgekeerde.
Waaruit het gestelde volgt. ◊

6. Lemoine-cirkels

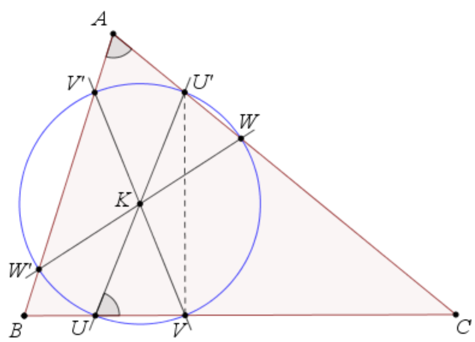
In paragraaf 4 is onder meer aangetoond:
- twee antiparallellen met gelijke lengtes snijden elkaar op de symmediaan naar de derde zijde (gevolg van stelling 4.1);
- de drie symmedianen zijn concurrent in het Lemoine-punt van de driehoek (stelling 5).

Het Lemoine-punt van een driehoek speelt nu een rol bij twee bijzondere cirkels bij een driehoek, de zogenoemde *eerste* en *tweede Lemoine-cirkel*.

figuur 17a



figuur 17b



Stelling 14

14.1. De drie lijnen die gaan door het Lemoine-punt én evenwijdig zijn met de zijden van een driehoek, snijden de zijden van driehoek in zes concyclische punten; zie figuur 17a (eerste Lemoine-cirkel).
14.2. De drie lijnen die (ook) door het Lemoine-punt gaan én antiparallel zijn aan de zijden van een driehoek, snijden de 'niet-overeenkomstige' zijden in drie paren concyclische punten; zie figuur 17b (tweede Lemoine-cirkel). ◊

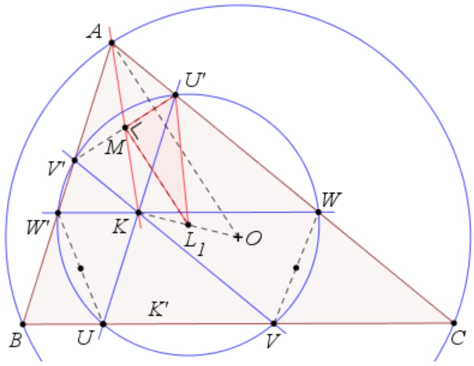
Bewijs. **14.1.** Zie weer figuur 17a, waarin UU', VV', WW' de in de stelling bedoelde lijnen zijn.
Vierhoek $AV'KU'$ is een parallellogram. Omdat AK (de A-symmediaan) door het midden M van $U'V'$ gaat (stelling 2), is $U'V'$ antiparallel aan BC en dus ook aan de daarmee evenwijdige $W'W$.
De punten W, U', V', W' zijn dus concyclisch.
Mutatis mutandis is ook het viertal W', U, V, V' concyclisch en dat is ook het geval ook het viertal V, W, U', U.
Zou dit drietal cirkels verschillend zijn, dan zouden de machtlijnen van elk tweetal cirkels, te weten $UV' \equiv BC$, $WU' \equiv CA$, $V'W' \equiv AB$, door hetzelfde punt gaan. En dat is duidelijk *niet* het geval.
En als twee van de cirkels zouden samenvallen, dan zou ook de derde cirkel met die cirkels samenvallen.
Conclusie: de punten U, U', V, V', W, W' liggen op *dezelfde* cirkel.

14.2. Zie figuur 17b, met de antiparallellen UU', VV', WW' (anders dan in figuur 17a),
De antiparallellen UU' (vs. AB) en VV' (vs. AC) snijden elkaar in K (het Lemoine-punt) op de symmediaan AK. Ze zijn dus conform (de omgekeerde van) stelling 4.1 even lang. En dat geldt natuurlijk ook voor bijvoorbeeld VV' en WW'.
Volgens stelling 2 is K het midden van elk van de antiparallellen.

En daarmee liggen de punten U, U', V, V', W, W' op de cirkel met middelpunt K. ◊

Opmerkingen. **1.** In figuur 17a is O het middelpunt van de omcirkel van driehoek ABC.
Het punt M is het midden van het lijnstuk $U'V'$. Is dan L_1 het midden van het lijnstuk OK, dan is ML_1 middenparallel in driehoek KOA, zodat ML_1 evenwijdig is met OA. Maar OA staat loodrecht op $U'V'$ (conform stelling 3). En dus is ook $L_1M \perp U'V'$.
De lijn ML_1 is daarmee middelloodlijn van $U'V'$. Op dezelfde manier kan bewezen worden dat de middelloodlijnen van $V'U$ en VW eveneens door L_1 gaan.
Het midden L_1 van OK is dus het middelpunt van de eerste Lemoine-cirkel. De lengte van de straal L_1U' geef ik aan met r_1.

figuur 17c



De lijnen $U'V'$, $W'U$, VW zijn antiparallel aan de zijden BC, AB, AC van driehoek ABC. De lengtes van de lijnstukken zijn daarmee alle gelijk aan de straal r_2 van de *tweede* Lemoine-cirkel. [14]
In de in M rechthoekige driehoek ML_1U' is dan volgens de *stelling van Pythagoras*:

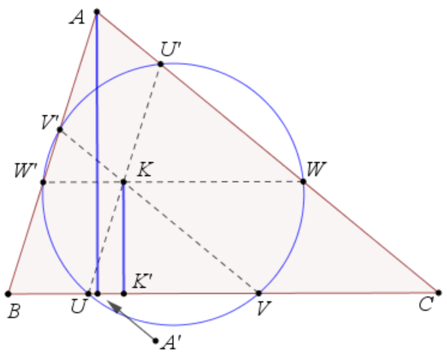
- $(L_1U')^2 = (L_1M)^2 + (U'M)^2$ of:
- $r_1^2 = (\frac{1}{2}R)^2 + (\frac{1}{2}r_2)^2$ of:
- $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + r_2^2}$

2. Voor een berekening van de straal van de tweede Lemoine-cirkel als functie van de *Brocard-hoek* van een driehoek zie de Appendix, paragraaf 3. ◊

Stelling 15

15a. De lengtes van het drietal koorden van de eerste Lemoine-cirkel waarvan de eindpunten op de zijden van de driehoek liggen, zijn evenredig met de derde machten van de overeenkomstige zijden.
15b. De lengtes van het drietal koorden van de tweede Lemoine-cirkel waarvan de eindpunten op de zijden van de driehoek liggen, zijn evenredig met de cosinussen van de tegenoverliggende hoeken.

figuur 17d



Bewijs. **15a.** Zie figuur 17c, waarin zijn A', K' loodrechte projecties van A, K op BC.
Nu zijn de driehoeken KUV en ABC gelijkvormig (*hh*), waardoor voor overeenkomstige lijnstukken de volgende relatie bestaat:

- $UV : BC = KK' : AA'$

of:

- $UV : KK' = BC : AA' = BC^2 : (AA' \cdot BC) = BC^2 : ½\Phi$

Zodat: $UV = \dfrac{KK' \cdot BC^2}{\frac{1}{2}\Phi}$

Volgens stelling 4.1 is $KK' = t \cdot BC$ (voor reële $t > 0$). Voor WU' en $V'W'$ bestaan analoge uitdrukkingen, zodat:

- $UV : WU' : V'W' = BC^3 : CA^3 : AB^3$ ◊

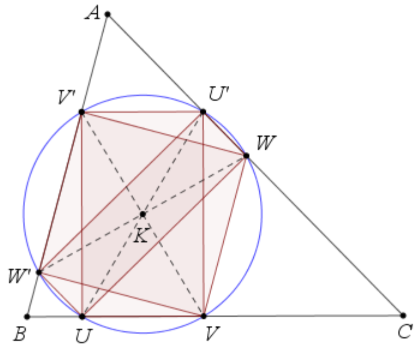
15b. Zie figuur 17b. In de in V rechthoekige driehoek UVU' is $\cos(U'UV) = \cos A = UV/UU'$, waaruit volgt dat $UV = UU' \cdot \cos A$.
En dan is, analoog, ook $WU' = WW' \cdot \cos B$ en $VW' = VV' \cdot \cos C$.
Maar, zoals bekend is, is $UU' = VV' = WW'$, en dan blijkt:

- $UV : WU' : VW' = \cos A : \cos B : \cos C$ ◊

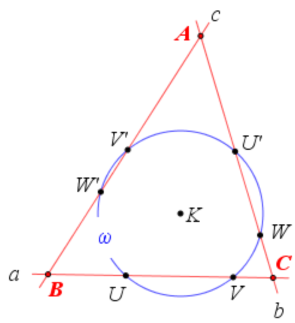
Opmerking. Om deze reden wordt de *tweede* Lemoine-cirkel wordt ook wel *cosinuscirkel* van driehoek ABC genoemd. ◊

Twee andere constructies van *K* – Op basis van stelling 14.2, de tweede Lemoine-cirkel, is het mogelijk een driehoek *samen met* het Lemoine-punt van die driehoek met behulp van drie middellijnen te construeren.
In de figuur van de tweede Lemoine-cirkel zijn drie rechthoeken aan te wijzen; zie figuur 18a.

figuur 18a



figuur 18b



De bedoelde rechthoeken zijn: $UVU'V'$, $VWV'W'$ en $WU'W'U$. Van elk van deze rechthoeken ligt precies één zijde langs een zijde van de driehoek.
Het is voor de constructie noodzakelijk *eerst* het Lemoine-punt te tekenen.

Constructiestappen

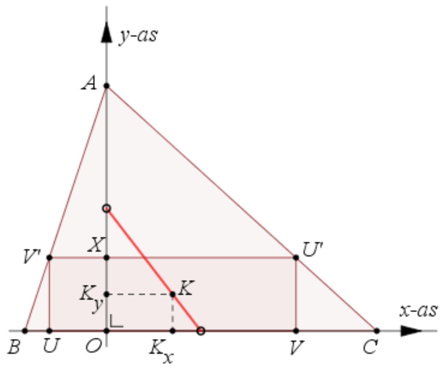
1. K = NieuwPunt
2. ω = CirkelMiddelpuntStraal(K, 2)
3. $\{U, V, W\}$ = PuntOpObject(ω)
4. $\{U', V', W'\}$ = Puntspiegeling($\{U, V, W\}$, K)
5. a = RechteLijn(U, V) ; b = RechteLijn(W, U') ; c = RechteLijn(V', W')
6. $A = b$ & c ; $B = c$ & a ; $C = a$ & b

Op de volgende stelling kan eveneens een constructie van het punt K worden gebaseerd.

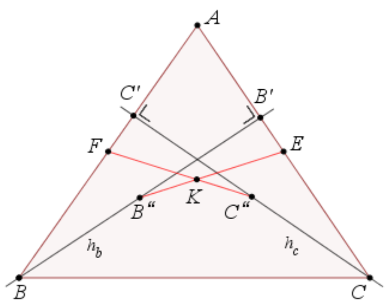
Stelling 16. Het Lemoine-punt van een driehoek ligt op de verbindingslijn van het midden van een zijde met het midden van de hoogtelijn op die zijde. ◊

Opmerking vooraf. In figuur 18a is het duidelijk dat de zijde UV van de rechthoek $UVU'V'$ op de zijde BC van driehoek ABC ligt. Deze rechthoek is één van de rechthoeken waarvan twee hoekpunten op BC liggen en de andere respectievelijk op CA en BA. Daarom ga ik (in eerste instantie) op zoek naar de meetkundige plaats van de middelpunten van dat type rechthoeken. Immers, één van die middelpunten is het midden een diagonaal van zo'n rechthoek én daarbij Lemoine-punt van de driehoek. ◊

figuur 19a



figuur 19b



Bewijs. **1.** Ik zal stelling 16, voor de verandering, eerst analytisch bewijzen (zie punt 2 voor een tweede bewijs). Ik kies daartoe een xOy-assenstelsel waarvan de x-as valt langs de zijde BC van de driehoek en waarvan het punt O op de A-hoogtelijn ligt.
Zie figuur 19a.
Met $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$ en $C = (c, 0)$ is voor de vergelijkingen [15] van de zijden BA en CA:

$$BA :: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \;;\; CA :: \frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1$$

De rechthoek $UVU'V'$ wordt bepaald door een variabel punt X (het 'sturende' punt van de meetkundige plaats) op OA, waarbij $U'V'$ (// BC) door X gaat. De punten U en V zijn dan de projecties van V' en U' op de x-as. K_x is het midden van UV en K_y is het midden van OX.
Stel nu $X = (0, 2t)$.
Dan volgt daaruit, na enig rekenwerk:

$$x_{V'} = x_U = b(1-\frac{2t}{a}) \text{ en } x_{U'} = x_V = c(1-\frac{2t}{a})$$

En dan is:

$$x_K = \tfrac{1}{2}(x_U + x_V) = \tfrac{1}{2}(b+c)(1-\frac{2t}{a}) \text{ en } y_K = \tfrac{1}{2}y_X = t$$

De vergelijking van de meetkundige plaats van het punt K kan nu worden gevonden door t te elimineren uit de uitdrukkingen voor x_K en y_K en daarna de coördinaten 'lopend' te maken:

$$ax = \tfrac{1}{2}(b+c)(a-2y)$$

Dit is een 1e-graads vergelijking in x en y, zodat de meetkundige plaats een rechte lijn is. Nu is:
- voor $y = 0$ is $x = \frac{1}{2}(b + c)$
- voor $x = 0$ is $y = \frac{1}{2}a$

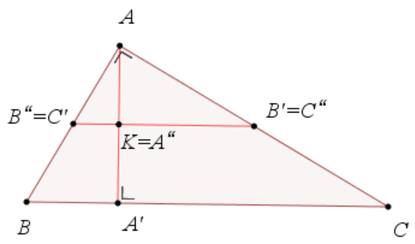
Die rechte lijn gaat dus door het punt $(\frac{1}{2}(b+c), 0)$ – dat is het midden van BC – en door het punt $(0, \frac{1}{2}a)$ – en dat is het midden van OA.
Waarmee het gestelde is aangetoond. ◊

Gevolg. Met behulp de middens van twee zijden en de middens van de hoogtelijnen naar die zijden is het Lemoine-punt K van een driehoek te construeren (in een rechthoekige met één hoogtelijn; zie het gevolg hierna). Zie voor de constructie figuur 19b, waarbij ik uit ga van een in ligging en grootte gegeven driehoek ABC.

Constructiestappen
1. E = Midden(C, A); F = Midden(B, A)
2. h_b = Loodlijn(B, CA); h_c = Loodlijn(C, BA)
3. $B' = h_b$ & CA; $C' = h_c$ & BA
4. B'' = Midden(B, B'); C'' = Midden(C, C')
5. $K = B''E$ & $C''F$

Gevolg van dit gevolg – Nu dit bekend is, kijk ik nog eens naar een A-rechthoekige driehoek ABC.

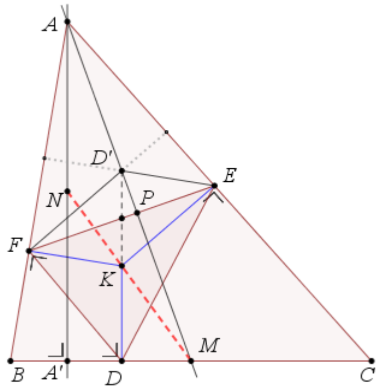
figuur 19c



Het midden van de hoogtelijn uit B is B'', het midden van AB.
Het midden van de tegenoverliggende zijde van B is B'.
Volgens stelling 16 ligt K dus op het lijnstuk $B'B''$.
En vervolgens is $C'' \equiv B'$ en $C' \equiv B''$, en ook is $C'C'' \equiv B'B''$ // BC. Maar dan valt K samen met het midden A'' van de A-hoogtelijn:
Waarmee een tweede bewijs van stelling 9 is gegeven. ◊

2. Het bewijs van stelling 16 kan ook synthetisch. Zie daarvoor figuur 19d.

figuur 19d



In nevenstaande figuur:
- K is het Lemoine-punt;
- DEF is de voetpuntsdriehoek van K;
- N is het midden van AA' (de hoogtelijn uit A);
- D' is het puntspiegelbeeld van D in K;
- $M = BC$ & AD'.

Ik zal onder meer laten zien dat AM ($\equiv AD'$) zwaartelijn is.

Nu is K het zwaartepunt van driehoek DEF (stelling 8).

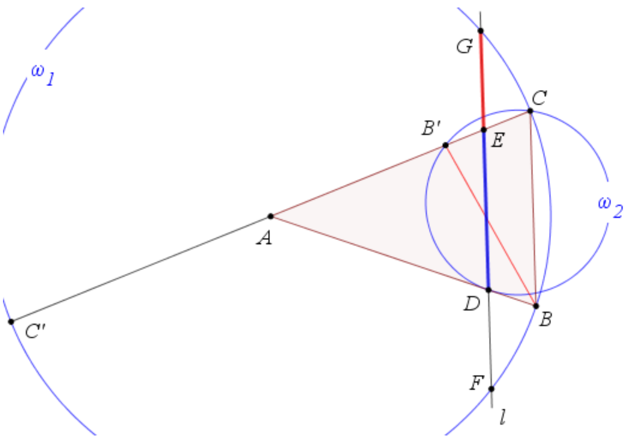
In vierhoek $KFED'$ wordt de diagonaal EF door de diagonaal KD' in twee gelijke delen verdeeld (DD' is immers zwaartelijn in driehoek DEF).
Vierhoek $KFED'$ is daardoor een parallellogram.
Omdat $FD' \parallel KE$ en $KE \perp CA$ is ook $FD' \perp CA$; en omdat $ED' \parallel KF$ en $KF \perp BA$ is ook $ED' \perp BA$.
Het punt D' is dus het hoogtepunt van driehoek AFE: AD' staat loodrecht op EF.
Maar dan is AD' de A-zwaartelijn van driehoek ABC (zie weer stelling 8; het punt P).
In driehoek $AA'M$ is MN een zwaartelijn, terwijl $DD' \parallel AA'$ én $DK = KD'$.
Dus ligt het punt K op MN (met M midden van BC en N midden van AA'). ◊

7. Symmediaan en gulden snede

Tot slot vermeld ik een resultaat uit [16].

Gegeven is een gelijkbenige driehoek ABC met top A; zie figuur 20.
Construeer daarin:
- de cirkel ω_1 met middelpunt A die door B en C gaat;
- de symmediaan BB', waarbij B' op de zijde CA ligt;
- de cirkel ω_2 die door C en B' gaat en raakt aan CA (in het raakpunt D) [17];
- de lijn l door D evenwijdig met BC;
- het snijpunten E van l met CA en de snijpunten F, G van l met ω_2.

figuur 20



Ik zal nu bewijzen:

Stelling 17. Het punt E bepaalt op het lijnstuk DG de gulden snede [18].

Bewijs. Ik zal laten zien dat in deze configuratie geldt:

(7.1)… $DE^2 = EG \cdot DG$

De lijn CA snijdt ω_1 ook in C'.
Nu is, gebruikmakend van de 'koordenstelling' (de macht van E bij ω_2):

(7.2)… $DG \cdot EG = FE \cdot EG = C'E \cdot EC = (C'A + AE)(AC - AE) = (AC + AE)(AC - AE) =$
$= AC^2 - AE^2 = AC^2 - AD^2 =$
$= AC^2 - AB' \cdot AC$

Omdat BB' symmediaan is van driehoek ABC is volgens stelling 4.1:
(7.3)… $AB' : AC = AB^2 : (AB^2 + BC^2)$
Dan volgt uit eerst uit (7.2) en dan met (7.3):

(7.4)… $DG \cdot EG = AC^2\left(1 - \dfrac{AB'}{AC}\right) = AC^2\left(1 - \dfrac{AB^2}{AB^2 + BC^2}\right) = \dfrac{AC^2 \cdot BC^2}{AB^2 + BC^2}$

Volgens de 'eerste stelling van Thales' (evenwijdige lijnen) is $AD : AB = DE : BC$. En dit geeft:

(7.5)… $DE^2 = BC^2 \cdot \dfrac{AD^2}{AB^2} = BC^2 \cdot \dfrac{AB' \cdot AC}{AC^2} = BC^2 \cdot \dfrac{AB'}{AC} = BC^2 \cdot \dfrac{AB^2}{AB^2 + BC^2}$

Vergelijking van (7.4) met (7.5) geeft (7.1), waarmee de stelling bewezen is. ◊

8. Noten

[1] Voor het programma *GeoGebra* zie:
https://www.geogebra.org/
De constructiestappen bij een dynamisch-meetkundeprogramma hebben meestal de vorm
p = Commando(q, r, …)
Hierin is p (de naam van) het te construeren object en zijn q, r, … de (namen van de) te selecteren (bestaande) objecten.
De uitdrukking $X = p$ & q betekent: X is een (het) gemeenschappelijk punt (snijpunt) van de meetkundige objecten p en q.

[2] Zie bijvoorbeeld (WikipediA NL):
https://nl.wikipedia.org/wiki/Antiparallel

[3] In dit verband worden met 'opstaande' zijden bedoeld de zijden van de driehoek die *niet* de overstaande zijde zijn van het hoekpunt dat de symmediaan bepaalt.

[4] De oppervlakte van de basisdriehoek ABC wordt in hetgeen volgt ook wel geschreven als $\Phi(ABC) = \Phi$.

[5] Naar Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840-1912, Frankrijk). In de zogeheten Kimberling-codering wordt het symmediaanpunt aangegeven met X(6).
Zie Clark Kimberling's *Encyclopedia of Triangle Centers* (*ETC*) via:
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[6] Naar Joseph-Louis Lagrange (1736-1813, Frankrijk).
De algemene vorm van de bedoelde identiteit is:
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2$$
Zie eventueel:
» Eric W. Weisstein: *Lagrange's Identity*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource op:
http://mathworld.wolfram.com/LagrangesIdentity.html

[7] Niet te verwarren met de *voetpuntsdriehoek van een driehoek.* Want dat is de driehoek die de voetpunten van de hoogtelijnen van een driehoek als hoekpunten heeft. Zie ook (WikipediA NL):
https://nl.wikipedia.org/wiki/Voetpuntsdriehoek
en eventueel:
» Dick Klingens (2002): *Oppervlakte van voetpuntsdriehoeken, voetpuntscirkels*. Op (de website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/voetpdrieh.htm

[8] De afstanden van een punt tot de zijden van een vaste driehoek kunnen dienen als coördinaten van dat punt in een zogeheten trilineair assenstelsel.
Voor meer informatie (w.o. literatuurverwijzingen) zie:
» Dick Klingens (2002): *Coördinatenstelsels in het platte vlak*. Op (de website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/coord/coordsyst.htm

[9] De negenpuntscirkel (ook wel Feuerbach-cirkel genoemd, naar Karl Wilhelm Feuerbach, 1800-1830, Duitsland) gaat dus door de zes genoemde punten van een driehoek én door middens van de drie 'bovenste stukken' van de hoogtelijnen (deze laatste zijn hier niet getekend).
Zie verder (WikipediA EN):
https://en.wikipedia.org/wiki/Nine-point_circle

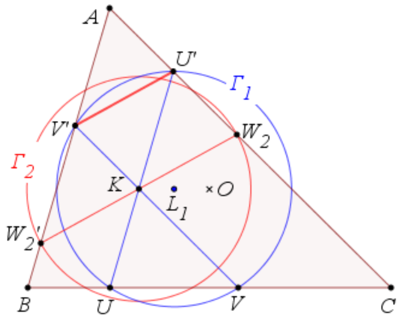
[10] Dit volgt uit de oppervlakteformule:
$\Phi(ABC) = ½BB' \cdot AC = ½BB' \cdot b$
$\Phi(ABC) = ½CC' \cdot AB = ½CC' \cdot c$

[11] In hetgeen volgt is de functie d(p, q) een afstandsfunctie: de functie geeft de afstand van het meetkundige object p tot het meetkundige object q. Het object p is daarbij meestal een punt.

[12] Naar Giovanni Ceva (1647-1734, Italië). Hier wordt de stelling gegeven met van teken voorziene lengtes van lijnstukken.
Zie verder (WikipediA, EN):
https://en.wikipedia.org/wiki/Ceva%27s_theorem

[13] Zie daarvoor eventueel:
» Dick Klingens (2004): *Apollonius-cirkel(s), isodynamische punten*. Op (de website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/apolcirk.htm#3

[14] Ik licht deze uitspraak, die wellicht niet direct duidelijk is, toe met de volgende figuur.



Hierin zijn UU', VV' parallellen aan resp. AB en AC die gaan door K, en is W_2W_2' antiparallel aan BC die ook door K gaat. Γ_1 en Γ_2 zijn opvolgend de eerste en tweede Lemoine-cirkel.
Het lijnstuk $U'V'$ is ook antiparallel aan BC en is dus evenwijdig met W_2W_2'. Omdat (bijvoorbeeld) $KW_2U'V'$ een parallellogram is en K het midden is van W_2W_2', is $U'V' = KW_2 = r_2$.

[15] Zie paragraaf 2 in de Appendix.

[16] » T.Q. Hung (2017): *Another construction of the golden ratio in an isoscales triangle*. In: *Forum Geometricorum*; volume 17, pp. 287-288.

[17] Dit is een deelconstructie van het *Raakprobleem van Apollonius*. Zie voor deze constructies (A210 of S210) bijvoorbeeld:
Dick Klingens (2004): *Het Raakprobleem van Apollonius*. Op (de website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/raakprob.htm

[18] Gulden snede = Lat. *Sectio aurea*. In de Nederlandse wiskunde-literatuur spreekt men ook wel van een *verdeling van het lijnstuk in uiterste en middelste reden*. 'In uiterste en middelste reden verdelen' is een letterlijke vertaling van het Griekse ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνειν (uitspraak: aakron kai meeson logon temnein) wat eigenlijk betekent: een lijnstuk verdelen in twee delen, waarvan het ene als een uiterste en het andere als middelste term in een evenredigheid optreedt. Dus hier houdt dit in dat $EG : DE = DE : DG$.
Euclides vermeldde de constructie in zijn *Elementen* in Boek II, propositie 11, en in Boek V, Definitie 3. De terminologie is ook terug te vinden in Arabische teksten en in Latijnse en Hebreeuwse vertalingen uit het Arabisch.
Zie bijvoorbeeld:
» Roger Herz-Fischler (1998): *A Mathematical History of the Golden Number*. Mineola (USA): Dover Publications Inc.

9. Appendix

§ 1 – Toepassing van de *verhoudingsstelling*

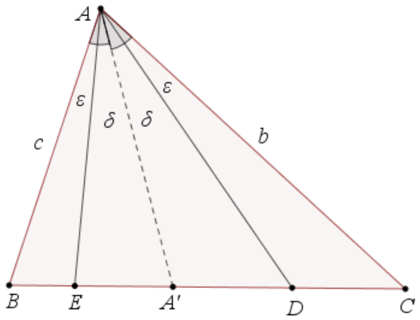
Stelling 4.1bis. Een symmediaan verdeelt de overstaande zijde in stukken die zich verhouden als de kwadraten van de (lengtes van de) 'opstaande' zijden.

Allereerst bewijs ik nu een stelling van Steiner [n1]:

Lemma. Als D een (willekeurig) punt is van de zijde BC van driehoek ABC en als het beeld van de lijn AD in de binnenbissectrice van hoek A de lijn BC snijdt in het punt E, dan is:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BE}{CE} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

figuur a1



Bewijs. Zie figuur a1. De binnenbissectrice van hoek A snijdt in die figuur de zijde BC in A'. Rond het punt A worden gelijke hoeken aangegeven met gelijke letters δ en ε.
Volgens de *verhoudingsstelling* (zie het Lemma na stelling 1) is:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin(BAD)}{\sin(CAD)}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin(2\delta+\varepsilon)}{\sin\varepsilon} \quad \text{en ook} \quad \frac{BE}{CE}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin(BAE)}{\sin(CAE)}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin(2\delta+\varepsilon)}$$

Vermenigvuldiging van de linker- en rechterleden van deze laatste uitdrukkingen geeft dan:

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BE}{CE}=\frac{c^2}{b^2} \quad \Diamond$$

Bewijs van stelling 4.1bis. Ik bewijs deze stelling voor de zwaartelijn BD en de symmediaan AE.
In dit geval is $BD = CD$.
En dan blijkt uit het bewezen lemma van Steiner direct dat $BE : CE = c^2 : b^2$ is. ◊

§ 2 – Assenvergelijking

De gebruikte vergelijkingen van de lijnen worden *assenvergelijking* genoemd: “de lijn wordt dan bepaald door stukken die ze van de coördinaatassen afsnijdt” [n2].
Met $A = (a, 0)$ en $B = (0, b)$, met $a, b \neq 0$, is de richtingscoëfficiënt, de rico, van de lijn AB:

$$\text{rico}(AB)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{b}{-a}$$

De vergelijking van de lijn AB is dan:

$$y=-\frac{b}{a}x+b$$

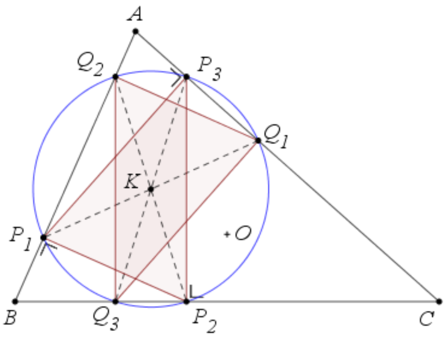
Deling door b en herschikking geeft dan direct:

$$AB :: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

§ 3 – Tweede Lemoine-cirkel, de Miquel-configuratie en de Brocard-hoek

Tweede Lemoine-cirkel – Ik bekijk opnieuw de *tweede* Lemoine-cirkel van driehoek ABC. Daarvan is bekend dat K het midden is van de aan de zijden BC, CA, AB antiparallelle lijnstukken P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 (zie figuur a2).

figuur a2



De verzameling van de zes op deze cirkel liggende punten valt uiteen in twee deelverzamelingen $\{P_1, P_2, P_3\}$ en $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$.
En daarvoor geldt:

Stelling 18. De driehoeken $P_1P_2P_3$ en $Q_1Q_2Q_3$ zijn congruent en ze zijn gelijkvormig met driehoek ABC. ◊

Bewijs. Ik pas een puntspiegeling toe op driehoek $P_1P_2P_3$ met het punt K als centrum. Driehoek $P_1P_2P_3$ gaat daarbij over in driehoek $Q_1Q_2Q_3$.

Dus is:

(3.1)… $\Delta P_1P_2P_3 \cong \Delta Q_1Q_2Q_3$ (*ZZZ*)

De punten P_1, P_2, Q_2 liggen op een *Thales-cirkel* (met middelpunt K; hier beschouwd als het midden van P_2Q_2). Dus is $\angle P_2P_1Q_2 = 90^\circ$, zodat $P_2P_1 \perp BA$.

Analoog zijn ook $P_3P_2 \perp CB$ en $P_1P_3 \perp AC$.

De overeenkomstige zijden van de driehoeken $P_1P_2P_3$ en ABC staan dus loodrecht op elkaar, waaruit volgt dat:

(3.2)… $\Delta P_1P_2P_3 \sim \Delta ABC$ (*zzz*)

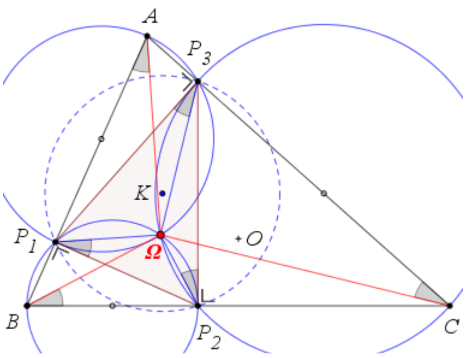
Uit (3.1) en (3.2) volgt dan het gestelde. ◊

Een Miquel-configuratie geeft een punt van Brocard – Drie punten die elk (willekeurig) op een zijde van een driehoek liggen, bepalen een zogeheten *Miquel-configuratie* van die driehoek. In het onderhavige geval kijk ik naar de configuratie ($P_1P_2P_3$, ABC), die dus bestaat uit twee driehoeken. [n3]

De *stelling van Miquel* zegt nu dat de drie *Miquel-cirkels* – en dat zijn hier de cirkels met middellijnen AP_1, BP_2 en CP_3 – door hetzelfde punt gaan: het *punt van Miquel* van de configuratie.

In figuur a3 is dat punt aangegeven met Ω.

figuur a3



Ik maak de lezer erop attent dat:

- P_2P_1 in P_1 raakt aan de cirkel op AP_1;
- P_3P_2 in P_2 raakt aan de cirkel op BP_2;
- P_1P_3 in P_3 raakt aan de cirkel op CP_3.

En dan blijkt de volgende eigenschap.

Stelling 19. Het Miquel-punt van de configuratie ($P_1P_2P_3$, ABC) is een *Brocard-punt* van driehoek $P_1P_2P_3$ en ook van driehoek ABC. ◊

Om deze stelling te kunnen bewijzen is natuurlijk een definitie van het begrip 'Brocard-punt' nodig.

Definitie. Een punt Ω binnen een driehoek ABC waarvoor geldt $\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA$, wordt **Brocard-punt** van die driehoek genoemd.[n4]

Opmerking. Dit punt is het *eerste* Brocard-punt van de driehoek, omdat er ook een *tweede* punt Ω' bestaat, namelijk met: $\angle \Omega'BA = \angle \Omega'CB = \angle \Omega'AC$. ◊

Bewijs van stelling 19. Zie figuur a3. In de cirkel met middellijn AP_1 die ook door P_3 gaat, is:

- $\angle \Omega P_3P_1 = ½\text{bg}(\Omega P_1) = \angle \Omega AP_1$

en ook is:

- $\angle \Omega AP_1 = ½\text{bg}(\Omega P_1) = \angle \Omega P_1P_2$

In de cirkel met middellijn BP_2, die ook door P_1 gaat, is:

- $\angle \Omega BP_2 = ½\text{bg}(\Omega P_2) = \angle \Omega P_1P_2 = \angle \Omega P_2P_3$

en in de cirkel met middellijn CP_3, die door P_2 gaat, is:

- $\angle \Omega P_2P_3 = ½\text{bg}(\Omega P_3) = \angle \Omega CP_3$

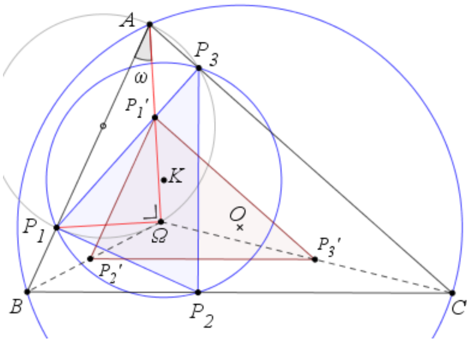
Uit de gelijkheid van de zes hoeken blijkt dat het punt Ω inderdaad het Brocard-punt is van driehoek ABC én ook van driehoek $P_1P_2P_3$. ◊

Opmerking. De grootte van de zes gelijke hoeken die via het Brocard-punt worden bepaald (of de hoek zelf), wordt vaak aangegeven met ω, de **Brocard-hoek** van de configuratie. ◊

De stralen r_1 en r_2 – Ik onderwerp nu driehoek $P_1P_2P_3$ aan een rotatie met Ω als centrum en met een rotatiehoek van -90° (in wijzerrichting); zie figuur a4. De rotatiehoek is $\angle P_1\Omega A$. Deze hoek is recht omdat Ω immers ligt op de cirkel met middellijn AP_1.

Het beeld $P_1'P_2'P_3'$ van $P_1P_2P_3$ komt door die rotatie in homothetische ligging met driehoek ABC.

figuur a4



En dan blijkt in driehoek $P_1\Omega A$ dat:

$$\frac{\Omega P_1'}{\Omega A} = \frac{\Omega P_1}{\Omega A} = \tan\omega$$

zodat:

- $\Omega P_1 = \Omega A \cdot \tan\omega$

De gelijkvormigheidsfactor van driehoek ABC *naar* driehoek $P_1P_2P_3$ is dus gelijk aan $\tan\omega$.

Voor de stralen van de omcirkels van de driehoeken ABC en $P_1P_2P_3$, opvolgend R en r_2, geldt dus:

- $r_2 = R \cdot \tan\omega$

Gevolg. Voor de straal r_1 van de *eerste* Lemoine-cirkel is – in paragraaf 6, na het bewijs van stelling 4.2 – afgeleid dat $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + r_2^2}$.

En dit wordt dan nu:

- $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + R^2\tan^2\omega} = \frac{1}{2}R\sqrt{1+\tan^2\omega} = \frac{1}{2}R\cdot\sec\omega$ ◊

10. Noten bij de Appendix

[n1] Naar Jakob Steiner, 1796-1863, Zwitserland. Er zijn in de wiskundige literatuur veel stellingen naar Steiner genoemd. Men zou bij deze stelling kunnen spreken van *Steiner's isogonaal-stelling*.

[n2] Zie:
» D.J.E. Schrek (1964): *Beknopte analytische meetkunde*. Groningen: P. Noordhoff N.V.; pp. 25-26.

[n3] Voor een, volgens mij, redelijk toegankelijke behandeling van de configuratie van Miquel verwijs ik naar:
» Dick Klingens (2004): *De stelling van Miquel*. Op (de website van de auteur): *http://www.pandd.demon.nl/miquel.htm*

[n4] Voor een uitvoerige behandeling van de Brocard-configuratie verwijs ik naar:
» R.A. Johnson (1929): *Advanced Euclidean Geometry*. Mineola (USA): Dover reprint (2007); pp. 263-286.

---

versie 1.0 … 1.4 – november 2017
versie 2.0 … 2.3 – december 2017