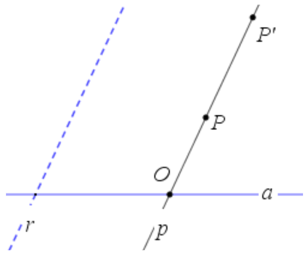
Lijnvermenigvuldiging – WikipediA

{{noindex}}
Een **lijnvermenigvuldiging** (ook wel *axiale vermenigvuldiging*) is een afbeelding (transformatie) van het [[euclidische meetkunde|euclidische vlak]] op zichzelf, waarbij twee vaste rechte [Lijn (meetkunde)|lijn]]en a en r, die *niet* [[evenwijdig]] zijn, en een [[reëel getal]] $k \neq 0$ een rol spelen bij het bepalen van het beeldpunt P' van een punt P in dat vlak.

figuur 1



Het beeld $P' = \mathrm{V}(P)$ van ieder punt P bij een lijnvermenigvuldiging V wordt als volgt bepaald (zie figuur 1).

1. Het punt O (verderop ter onderscheid, bij een punt X, ook wel geschreven als O_x) is het snijpunt met de lijn a van de lijn p die door het punt P gaat en die evenwijdig is met de lijn r.
2. Het punt P' ligt zó op de lijn p dat $OP' = |k| \cdot OP$.
3. Als $k > 0$ is, dan liggen P en P' aan dezelfde kant van O; is $k < 0$, dan liggen P en P' aan verschillende kanten van O (het punt O ligt dan op het lijnstuk PP').

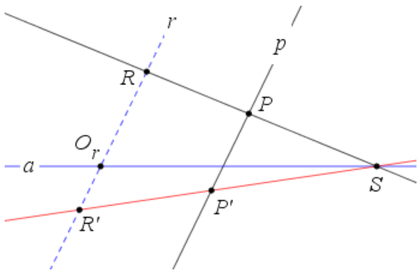
== Naamgeving ==

De lijn a is de *affiniteitsas* (of *collineatie-as*) van V, kortweg ook wel de *as* van V. De (richting van de) lijn r is de *richting* van V. Het getal k is de (*vermenigvuldigings*)*factor* van V.
Als a en r niet loodrecht op elkaar staan, dan is V *scheef*: een scheve lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de as a met richting r.
Als a loodrecht staat op r, dan is V *recht* (of *orthogonaal*): een rechte lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de as a. In dit laatste geval wordt het woord 'rechte' soms weggelaten.
Als $k = 1$ is, is V de zogeheten *identieke afbeelding*: voor ieder punt P is dan $\mathrm{V}(P) = P$.

== Een andere definitie ==

De factor k kan ook worden vastgelegd door een gegeven punt R en het beeldpunt R' daarvan. Deze punten worden meestal op de lijn r gekozen. Liggen R en R' daarbij aan verschillende kanten van O_r (het snijpunt van r en a), dan is k negatief (zie figuur 2, waarin $k \approx$ -0,46).

figuur 2



N.B. Als het getal k op deze manier wordt vastgelegd, is de lijnvermenigvuldiging van een punt geheel met [[Constructie met passer en liniaal|passer en (ongemerkte) liniaal]] uit te voeren. Het op de lijn a liggend punt S van de verbindingslijn tussen R en het te vermenigvuldigen punt P speelt daarbij een 'intermediërende' rol.

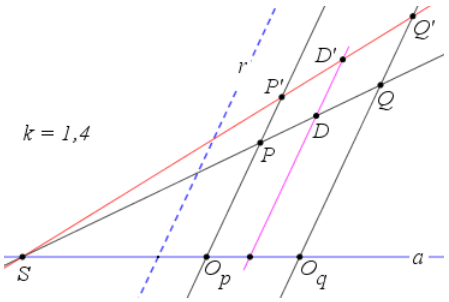
== Eigenschappen ==

In deze paragraaf is V een scheve of rechte lijnvermenigvuldiging t.o.v. de as a, met richting r en met $k \neq 1$.

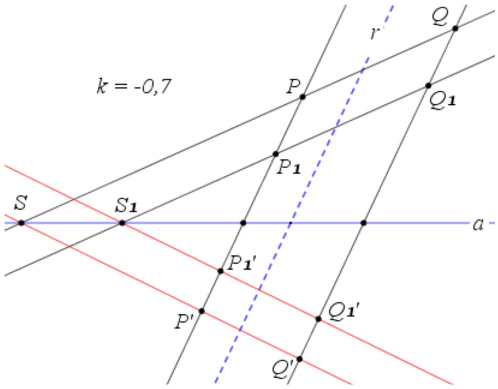
- De lijn a is invariant onder V: voor ieder punt S van a is $\mathrm{V}(S) = S$.

- De lijn r wordt *niet* puntsgewijs op zichzelf afgebeeld: voor ieder punt R van r geldt dat $R' = \mathrm{V}(R)$ op de lijn r ligt, waarbij dan $R' \neq R$ (als $R = O_r$, dan is $k = 0$).

figuur 3



figuur 4



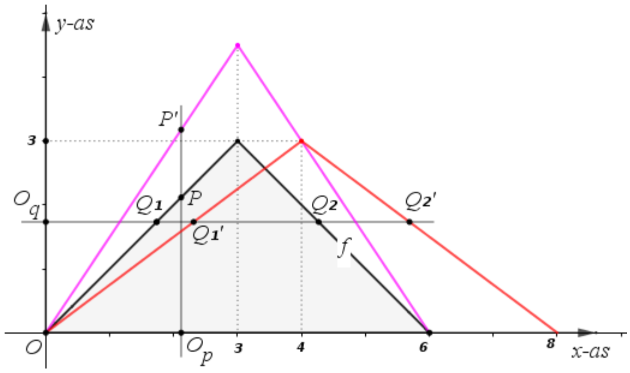
- Een rechte lijn wordt door V afgebeeld op een rechte lijn. Het snijpunt S van een lijn en diens beeldlijn ligt op de lijn a (mits die lijn niet evenwijdig is met r).
- Een deelverhouding [n1] op een lijnstuk is gelijk aan de (door V ingesneden) deelverhouding op het beeldlijnstuk; zie figuur 3, waarin $(PQD) = (P'Q'D')$.
- Evenwijdige lijnen worden door V afgebeeld op evenwijdige lijnen; zie figuur 4.

Op grond van deze eigenschappen behoren de lijnvermenigvuldigingen tot de zogeheten [[affiene transformatie]]s van het vlak.

== Twee toepassingen ==

1. Bij [[Grafiek (wiskunde)|grafiek]]en van functies (in een standaard [Cartesisch coördinatenstelsel|*xOy*-assenstelsel]]) wordt de lijnvermenigvuldiging gebruikt bij verticaal en horizontaal vermenigvuldigen van (de grafiek van) de functie (verschalen); dat wil zeggen:
a. *verticaal vermenigvuldigen* – het toepassen van een (rechte) lijnvermenigvuldiging t.o.v. de x-as;
b. *horizontaal vermenigvuldigen* – het toepassen van een (rechte) lijnvermenigvuldiging t.o.v. de y-as.

figuur 5



Voorbeeld. In figuur 5 is de grafiek van de functie $y = f(x) = 3 - |x-3|$ weergegeven op het [[Interval (wiskunde)|interval]] $[0;6]$.

Het beeld van (de grafiek van) f is bepaald met de verticale vermenigvuldiging V_x waarbij $k = 1\frac{1}{2}$; daarbij is $\mathrm{V}_x(P) = P'$. De grafiek van het V_x-beeld van de grafiek van f heeft daarmee het voorschrift:

- $y = 1\frac{1}{2}(3 - |x-3|) = 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}|x-3|$

In dezelfde figuur is op f ook de horizontale vermenigvuldiging V_y met $k = 1\frac{1}{3}$ toegepast, beperkt tot het interval $[0;3]$ op de y-as. Daarbij is $\mathrm{V}_y(Q_1) = Q_1'$ en $\mathrm{V}_y(Q_2) = Q_2'$.

Is nu $Q = (x_o, y_o)$, voor $Q = Q_1, Q_2$, dan is: [n2]

- $\mathrm{V}_y(Q) = (1\frac{1}{3}x_o, y_o) = (x_n, y_n)$

zodat:

- $x_n = 1\frac{1}{3}x_o$ en $y_n = y_o$

Omdat zo'n punt Q op de grafiek van f ligt, geldt ook: $y_o = 3 - |x_o - 3|$. Daaruit volgt door substitutie:

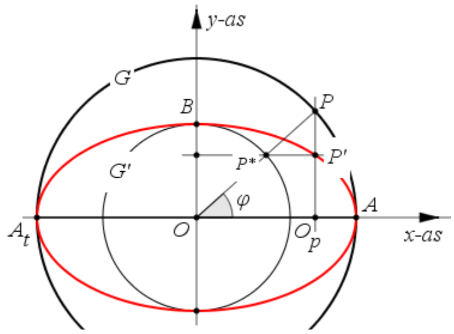
- $y_n = 3 - |\frac{3}{4}x_n - 3|$

Het functievoorschrift van het V_y-beeld van de (grafiek van de) functie *f* is dan:

- $y = 3 - |\frac{3}{4}x - 3|$.

2. In de meetkunde wordt de lijnvermenigvuldiging gebruikt bij de [[Analytische meetkunde|analytische]] behandeling van de [Ellips (wiskunde)|ellips]]: het beeld van een [[cirkel]] bij een rechte (of scheve) lijnvermenigvuldiging t.o.v. een [[middellijn]] van die cirkel is namelijk een ellips.

figuur 6



Voorbeeld. Zie figuur 6, waarin AA_t een middellijn is van de cirkel *G*. De vergelijking van *G*, met middelpunt *O* en straal *a*, is in een standaard *xOy*-assenstelsel:

- $x^2 + y^2 = a^2$

Voor een punt *P* op *G* is $P = (a\cos\varphi, a\sin\varphi)$, waarbij φ de (veranderlijke) hoek is tussen de positieve *x*-as en het lijnstuk *PO* (met $0 \le \varphi < 360°$).
Wordt op *G* de verticale vermenigvuldiging V_x toegepast met factor *b/a* (hier is $b < a$), dan geldt voor $P' = V_x(P)$:

- $P' = (a\cos\varphi, b\sin\varphi) = (x_n, y_n)$; of ook: $x_n = a\cos\varphi$, $y_n = b\sin\varphi$. Dus is:
- $\frac{x_n}{a} = \cos\varphi$, $\frac{y_n}{b} = \sin\varphi$. Kwadrateren geeft nu de relatie: $(\frac{x_n}{a})^2 + (\frac{y_n}{b})^2 = 1$.

De meetkundige plaats van de punten *P'* bij veranderende waarden van φ heeft dan de vergelijking:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

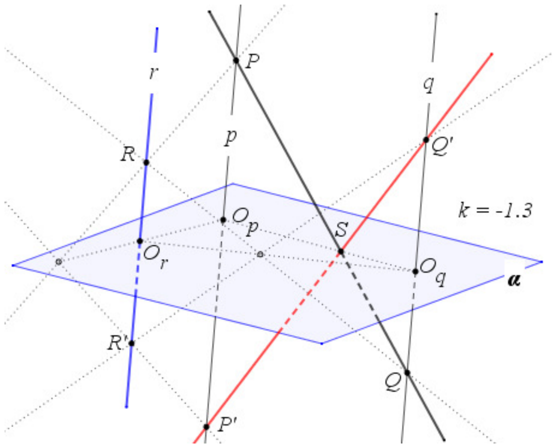
Dit is de vergelijking van een ellips met middelpunt *O* waarvan de lengtes van de halve assen gelijk zijn aan *a* en *b*.

In figuur 6 is ook de cirkel *G'*, met middelpunt *O* en straal *b*, weergegeven. Voor het snijpunt *P** van *OP* met *G'* is $P^* = (b\cos\varphi, b\sin\varphi)$. Wordt nu op de cirkel *G'* de horizontale vermenigvuldiging V_y met factor *a/b* toegepast, dan geldt voor het beeldpunt $V_y(P^*)$ van *P** dat $V_y(P^*) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi) = P'$. En daaruit blijkt dat de horizontale vermenigvuldiging van de cirkel *G'* hetzelfde effect heeft als de verticale vermenigvuldiging van de cirkel *G*: in beide gevallen is dat de ellips met middelpunt *O* en halve assen *a* en *b*.

== Uitbreiding tot $\mathbb{R}^3$ ==

De lijn *a* moet in de 3-dimensionale euclidische ruimte vervangen worden door een vlak α om ook in die ruimte een dergelijke vermenigvuldiging met richting *r* te kunnen definiëren: een *vlakvermenigvuldiging* V. De lijn *r* moet daarbij het vlak α snijden.

figuur 7



De constructie van het beeldpunt $P' = \mathrm{V}(P)$ van P gaat in dit geval als volgt; zie figuur 7.
1. De lijn p gaat door het punt P en is evenwijdig met de lijn r.
2. Het punt O_p is het snijpunt van de lijn p met het vlak α.
3. Het punt P' ligt zó op de lijn p dat $O_pP' = |k| \cdot O_pP$. Als $k > 0$ is, dan liggen P en P' aan dezelfde kant van O_p; is $k < 0$, dan liggen P en P' aan verschillende kanten van O_p (dus aan verschillende kanten van het vlak α).

== Zie ook ==
- [[Verschalen (meetkunde)]]
- [[Homothetie (meetkunde)]]
- [[Lineaire transformatie]]
- [[Parametervergelijking]]
- [[Toegevoegde middellijnen]] bij een ellips
- [[Constructie van Rytz]] van toegevoegde middellijnen
- [[Projectie (wiskunde)]]

= Externe links =
- MATH4ALL: *Functies en grafieken, Transformaties*. Via de website. link
- D. KLINGENS (2002): *Affiene afbeeldingen van het vlak op zichzelf*. Via de website PandD. link.

== Bronnen en literatuur ==

- P. MOLENBROEK: *Leerboek der vlakke meetkunde*. Groningen: P. Noordhoff N.V.; 8e druk, 1939, pp. 429-435.
- P. MOLENBROEK: *Leerboek der stereometrie*. Groningen: P. Noordhoff N.V.; 8e druk, 1934, pp. 30-33.
- H.S.M. COXETER (1961): *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley & Sons, Inc.; 2nd edition, 1969, pp. 247-251, pp. 288-290.
- J.C.H. GERRETSEN (1969): *Grondslagen van de leer der translaties en spiegelingen in de vlakke meetkunde*. In: *Euclides*, jg. 1969-1970, nr. 3; pp. 91-104. link
- G. VONK, H. FREUDENTHAL (1971): *Projectieve meetkunde*. Utrecht: IOWO; tweede druk, 1975, pp. 29-38.
- M. KINDT (1993): *Lessen in Projectieve Meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven; 2e druk, 1996, pp. 75-80.

== Noten ==
[n1] Onder de dubbelverhouding (ABX) op het lijnstuk AB wordt verstaan de verhouding $AX:XB$.
[n2] De coördinaten x_o, y_o en x_n, y_n kunnen desgewenst worden gelezen als x-oud, y-oud en x-nieuw, y-nieuw.

«Categorie:Meetkunde]] «Categorie:Grafiek]]

===== LINKS
- Math4All = [http://math4allview.appspot.com/view?comp=hb-e2&subcomp=hb-e24&variant=m4a_view_old&parent=www.math4all.nl/overzichten/havo-b/10&repo=m4a&item=theory]
- Math4All = https://www.math4all.nl/
- PandD = http://www.pandd.demon.nl/promeet/affien.htm
- PandD = http://www.pandd.nl/
- Euclides = {{pdf}} https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/045_1969-70_03.pdf