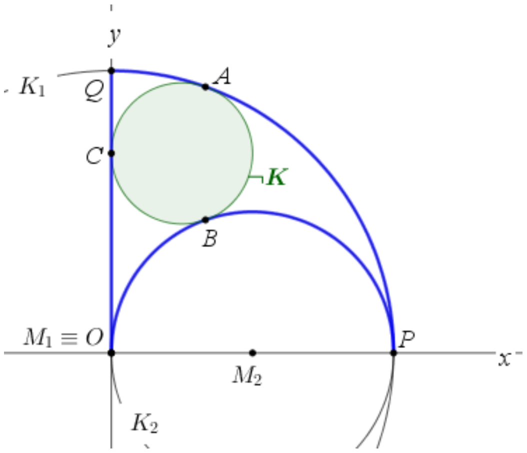
De constructie van een cirkel

DICK KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)
oktober 2020

1. Wat…

figuur 1



In figuur 1 zijn in ligging en grootte gegeven de cirkels K_1 en K_2 en ook de in het punt O loodrecht op elkaar staande lijnen $x \equiv OP$ en $y \equiv OQ$.
M_1 ($\equiv O$) en M_2 zijn de middelpunten van de cirkels.

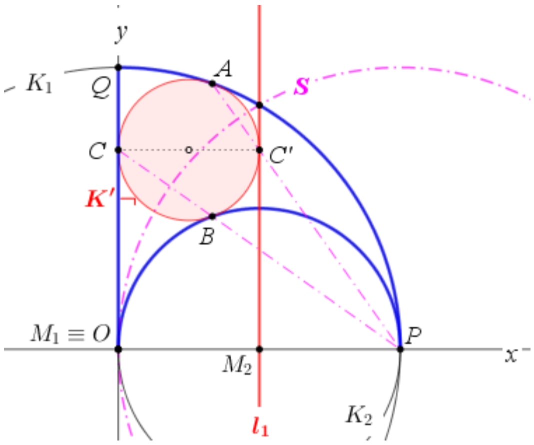
Gevraagd wordt (met passer en liniaal) een cirkel K te construeren die K_1 *inwendig* (in A) en K_2 *uitwendig* (in B) raakt en die tevens raakt aan de lijn y (in C) op het lijnstuk OQ.

In figuur 1 is de cirkel K alvast weergegeven.

2. Hoe…

Constructie. Ik gebruik een inversie φ met centrum P en straal PO; de inversiecirkel noem ik S; zie figuur 2. Uit de eigenschappen van een inversie [1] blijkt nu het volgende.

figuur 2



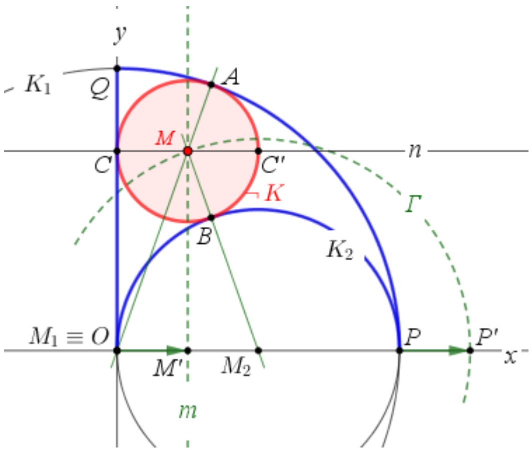
- Het φ-beeld y' van de rechte lijn y is een cirkel die door P gaat.
  Het φ-beeld van de lijn x is de lijn x zelf (niet-puntsgewijs), waarbij φ(O) = O.
  Omdat $\angle(x, y) = 90^o$ is, is ook $\angle(x, y') = 90^o$ (inversie is hoektrouw). De lijn x snijdt dus de cirkel y' loodrecht in het punt O. Dit houdt in dat y' samenvalt met K_2: $y' \equiv K_2$
- Het φ-beeld van het raakpunt C op y is dan het raakpunt B op K_2; dus: φ(C) = B; en omgekeerd ook: φ(B) = C.
  Het φ-beeld K' van K, dat natuurlijk ook een cirkel is, raakt dus in het punt C (= φ(B)) aan de lijn y.
- Het φ-beeld van K_1 is een rechte lijn l_1. Omdat de stralen van K_1 en S gelijk zijn en P op K_1 ligt, gaat de lijn l_1 door het midden van de centraal OP van K_1 en S.
  Met andere woorden, l_1 gaat door M_2en staat loodrecht op x in dat punt.
- Het φ-beeld C' van het raakpunt A van K aan K_1 ligt dus op l_1. De cirkel K' raakt daarmee ook aan de lijn l_1, en wel in het punt C'.

Uit het bovenstaande volgt dat de cirkel K' raakt in C en C' (aan resp. y en l_1). K' ligt dus in de "strook" die bepaald wordt door de lijnen y en l_1. De straal van K' is dus gelijk aan $\frac{1}{2}OM_2$.
En dan is direct duidelijk dat $K' \equiv K$. ◊

3. Anders…

Met wat in paragraaf 2 staat, is mijns inziens de constructie van de cirkel K, ook zonder gebruik van inversie, eenvoudig; zie figuur 3 en de daarbij behorende constructiestappen.[2] Ik gebruik in ieder geval het daar gevonden resultaat dat de straal r van de te construeren cirkel K gelijk is aan $\frac{1}{2}OM_2$.

figuur 3



Constructiestappen. Uitgaande van de gegevens in figuur 1 construeer ik de volgende meetkundige objecten.

- M' = Midden(O, M_2) // $OM' = r$
- m = Loodlijn(M', x)
- P' = Translatie(P, OM') // nu is $PP' = r$
- Γ = Cirkel(M_2, P') // cirkel gaat door P'
- M = Snijpunt(m, Γ) // dit is het middelpunt van K
- K = Passer(OM', M)

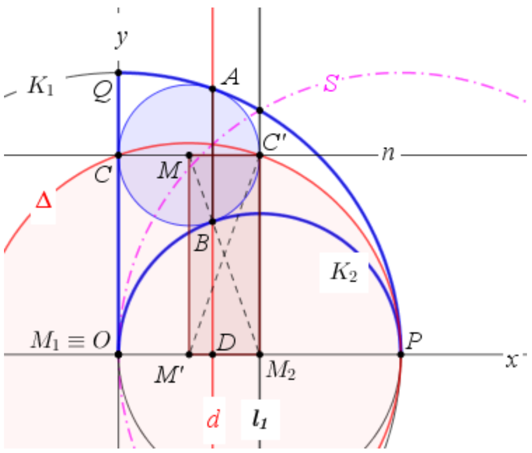
Cirkel K is nu inderdaad de gezochte cirkel.

De bijzondere punten daarvan – het zijn raakpunten – kunnen als volgt worden gevonden.

- A = Snijpunt(OM, K_1); B = Snijpunt(M_2M, K_2) // $MB = r$
- n = Loodlijn(M, y)
- C = Snijpunt(n, y); C' = Puntspiegeling(C, M) // punten op een middellijn van K

4. Waarom de lijn *AB* loodrecht staat op de lijn *x*…

figuur 4



Ik gebruik in deze paragraaf uiteraard de hierboven gevonden eigenschappen.

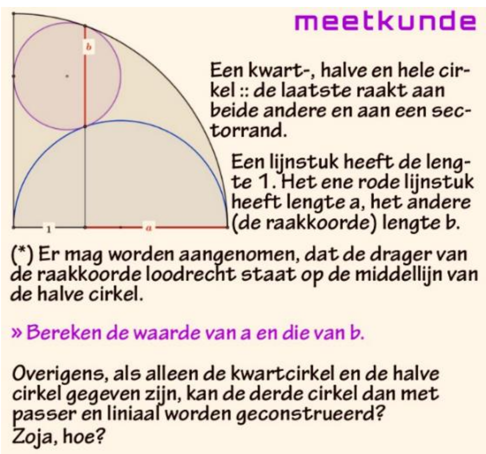
Zie figuur 4. De cirkel Δ door C en C' met middelpunt M' gaat door het punt P, omdat vierhoek $M'M_2C'M$ een rechthoek is ($M'M = M_2M$).
Het φ-beeld van deze cirkel is een rechte lijn d die door $A = \varphi(C')$ en door $B = \varphi(C)$ gaat.
Omdat voor de lijn x geldt, dat $\varphi(x) = x$ en x de cirkel Δ loodrecht snijdt, zal $\varphi(x)$ ook loodrecht staan op $\varphi(\Delta) = d$.

Met andere woorden: de drager d van het lijnstuk AB staat loodrecht op de gemeenschappelijke middellijn van de cirkels K_1 en K_2.

Korter gezegd: AB staat loodrecht op x.
Gevolg. De middelloodlijn n van het lijnstuk AB is evenwijdig met x.

5. Oorspronkelijk…

figuur 5a


meetkunde

Een kwart-, halve en hele cirkel :: de laatste raakt aan beide andere en aan een sectorrand.

Een lijnstuk heeft de lengte 1. Het ene rode lijnstuk heeft lengte a, het andere (de raakkoorde) lengte b.

(*) Er mag worden aangenomen, dat de drager van de raakkoorde loodrecht staat op de middellijn van de halve cirkel.

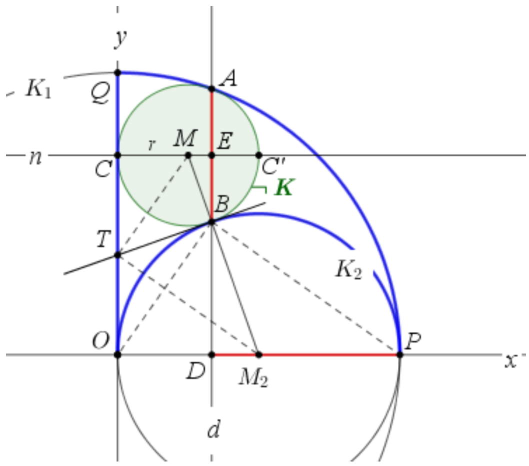
» Bereken de waarde van a en die van b.

Overigens, als alleen de kwartcirkel en de halve cirkel gegeven zijn, kan de derde cirkel dan met passer en liniaal worden geconstrueerd? Zoja, hoe?

Het oorspronkelijke probleem was *niet* de constructie van de cirkel K, maar een berekening gebaseerd op het eerste deel van de tekst in figuur 5a, die ik ook plaatste op mijn Facebook-pagina.[3]

Nb. De in figuur 5a bij (*) vermelde aanname is dus bewezen in paragraaf 4, terwijl de vraag met betrekking tot de constructie van K mijns inziens reeds voldoende beantwoord is (zie echter ook een andere constructie in paragraaf 6). ◊

figuur 5b



Ik herformuleer het rekenprobleem als volgt, onder verwijzing naar figuur 5b.

Gegeven. $AB = b$, $DP = a$ en $OD = 1$.
Te berekenen. a en b.

Oplossing. Driehoek OPB is een B-rechthoekige driehoek (*Thales-cirkel op OP*). Dus is:

· $BD^2 = OD \cdot DP = 1 \cdot a \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{a}$

En natuurlijk is hier $a > 0$.

AB staat loodrecht op OP (zie paragraaf 4), waaruit blijkt dat de middellijn n van K gaat door het midden E van AB. Volgens de secantstelling [4] bij K is dan:

· $EA \cdot EB = EC' \cdot EC \quad \Rightarrow \quad (\frac{b}{2})^2 = EC' \cdot 1 = EC'$

Ook is r = straal(K) = $CM = CE - ME = 1 - ME = 1 - (r - \frac{b^2}{4})$, zodat $2r = 1 + \frac{b^2}{4}$ of $r = \frac{4+b^2}{8}$.

De gemeenschappelijke (inwendige) raaklijn van K en K_2 in B snijdt OQ in het punt T. Dan is in de T-rechthoekige driehoek MTM_2:

· $TB^2 = MB \cdot BM_2 = r \cdot R$

Hierin is R dus de straal van K_2, zodat in dit geval $R = \frac{1}{2}(1+a)$.

Dan is [5]:

· $ED = \frac{b}{2} + \sqrt{a} = CO = 2TB = 2 \cdot \sqrt{\frac{4+b^2}{8} \cdot \frac{1+a}{2}} \quad \Rightarrow \quad (b + 2\sqrt{a})^2 = (4+b^2)(1+a)$

Zodat:

· $\underline{b^2} + \underline{4a} + 4b\sqrt{a} = 4 + \underline{4a} + \underline{b^2} + ab^2 \quad \Rightarrow \quad ab^2 - 4b\sqrt{a} + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (b\sqrt{a} - 2) = 0$

Uit deze laatste relatie volgt: $b\sqrt{a} = 2$ of $b = \frac{2}{\sqrt{a}}$.

Ik pas vervolgens de secantstelling toe in de “hele” kwartcirkel K_1:

· $DA \cdot DA_t = DP \cdot DP_t$

Hierin zijn A_t, P_t de (niet getekende) “tegenpunten” van A, P op K_1. Met in a en b uitgedrukte waarden geeft dit:

· $(b + \sqrt{a})^2 = a(a+2) \quad \Rightarrow \quad (\frac{2}{\sqrt{a}} + \sqrt{a})^2 = a^2 + 2a \quad \Rightarrow$

$$4 + 4a + a^2 = a^3 + 2a^2 \quad \Rightarrow \quad a^3 + a^2 - 4a - a = 0 \quad \Rightarrow \quad (a^2 - 4)(a+1) = 0$$

Zodat $a = 2$ en $b = \sqrt{2}$. ◊

6. Een andere constructie

De constructie van de cirkel K is een onderdeel van het zogenoemde *raakprobleem van Apollonius,*[6] dat algemeen het probleem beschrijft van de constructie van een cirkel die raakt aan *drie* gegeven cirkels (C = 3).

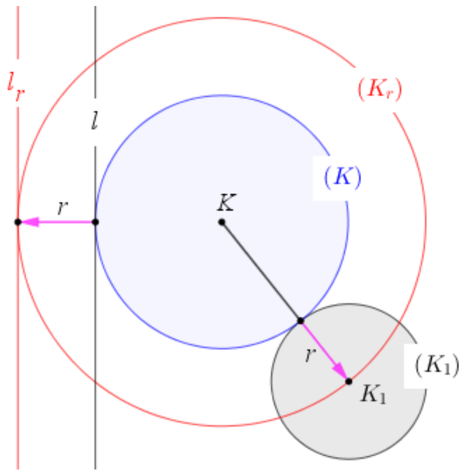
Maar, een cirkel kan ook worden opgevat als een punt (P, aantal) – een cirkel met straal 0 – of als een rechte lijn (L, aantal) – een cirkel met een oneindig grote straal.

Het in de voorgaande paragrafen beschouwde raakprobleem wordt daarom ook wel kort geformuleerd als (0 punten, 1 lijn, 2 cirkels): [7]

· (PLC) = (012)

Om het raakprobleem op te lossen *zonder* inversie wordt vaak de hierna beschreven eigenschap gebruikt; zie ter illustratie figuur 6.[8]

figuur 6

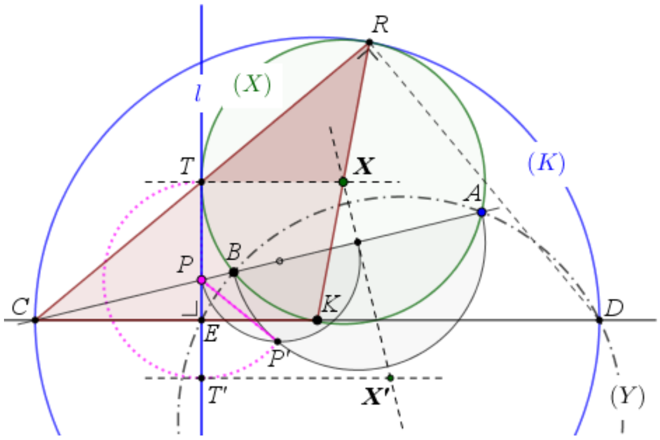


In nevenstaande figuur raakt (K) aan de lijn l en aan $(K_1; r)$.
Uit de figuur blijkt dat (K) *concentrisch* is met (K_r) die door K_1 gaat en die raakt aan de lijn l_r die evenwijdig is met l, gelegen op een afstand r van l.

Via deze eigenschap kan $(PLC) = (012)$ “teruggebracht” worden tot $(PLC) = (111)$.

Ik zal een en ander toepassen op het onderhavige probleem.
Daaraan vooraf geef ik eerst een iets algemener constructie van een cirkel (X) bij $(PLC) = (111)$.

figuur 7



In de figuur hiernaast zijn (K), de lijn l en het punt A in ligging en grootte gegeven.

- Merk op dat A *niet* ligt op de in E loodrecht op l staande middellijn CD van (K).

Gevraagd wordt (X) te construeren die raakt aan (K), aan l en gaat door A.

Ik ga uit van de reeds geconstrueerde cirkel (X) die aan (K) raakt in R.

6a. Analyse en constructie. Bij de analyse van het probleem zal ook stap voor stap worden toegewerkt naar de constructie van het punt X.

Het punt R is gelijkvormigheidspunt van (X) en (K), waaruit volgt dat de lijn RC door het raakpunt T van (X) op l gaat.
In de vierhoek $EDRT$ zijn de hoeken E en R gelijk aan 90° (zie de Thales-driehoek DRC). Dan is vierhoek $EDRT$ een koordenvierhoek. Voor C bij de (niet getekende) omcirkel daarvan geldt nu, volgens de secantstelling:
· $CD \cdot CE = \underline{CR \cdot CT}$
Voor het punt C bij (X) geldt nu ook:
· $\underline{CR \cdot CT} = CA \cdot CB$
waarbij B het (nog te construeren) tweede snijpunt is van de lijn CA met (X).
Uit beide relaties blijkt dan:
· $CD \cdot CE = CA \cdot CB$
Volgens de omgekeerde secantstelling voor C zijn de punten D, E, A, B concyclisch. De omcirkel (Y) van vierhoek $DABE$ valt samen met de omcirkel van driehoek DAE, waarmee het punt B geconstrueerd kan worden.

Ik merk nu reeds op dat het punt X ligt op de middelloodlijn van AB; en ook dat het punt B via CB eveneens te construeren is als vierde evenredige bij CA, CD en CE – dit zal ik hierna gebruiken.

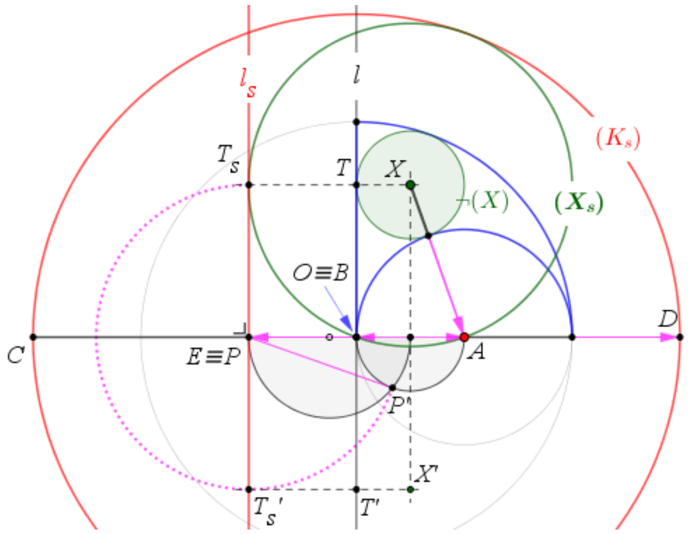
Overigens, het constructieprobleem is nu teruggebracht tot $(PLC) = (210)$, immers (X) moet gaan door de punten A en B én raken aan de lijn l.

Is nu P het snijpunt van AB met l en is T het raakpunt van (X) met l, dan geldt op grond van de secantstelling bij (Y):
· $PT^2 = PB \cdot PA$

Een lijnstuk PP' waarvan de lengte gelijk is aan PT, is nu te construeren als raaklijnstuk aan de (halve) Thales-cirkel op het lijnstuk AB.
De snijpunten T, T' van (P; PP') met l zijn dan raakpunten van (X), (X') die voldoen aan de gestelde eisen.
De middelpunten daarvan zijn de snijpunten van de loodlijnen in T, T' op l met de middelloodlijn van AB.
In figuur 7 is alleen (X) getekend. ◊

6b. Terug naar figuur 1. Op basis van het bovenstaande zal ik nu de constructie opnieuw uitvoeren. Ik houd daarbij echter de naamgeving van figuur 7 zoveel mogelijk aan.

figuur 8



De straal van de halve cirkel (middelpunt A; dat was M_2) stel ik gelijk aan s:

- $OA = s$

De straal van de kwartcirkel is dus $2s$.
Op grond hiervan is ook (K_s) = (O; $3s$) geconstrueerd, uitgaande van de kwartcirkel (dat was K_1).
De lijn l_s is evenwijdig met l (eerder was dit y) verschoven over de afstand s:

- $EO = s$

Omdat in dit geval het punt A op de middellijn CD van (K_s) ligt, is de hierboven geïntroduceerde cirkel (Y) ontaard in een rechte lijn die met CD samenvalt. Het punt B ligt daardoor (ergens) op CD.
Ook is $P = CD$ & $l_s = E$.
De constructie van het punt B verloopt echter eenvoudig via de eerder in deelparagraaf 6a gevonden relatie:

- $CD \cdot CE = CA \cdot CB$

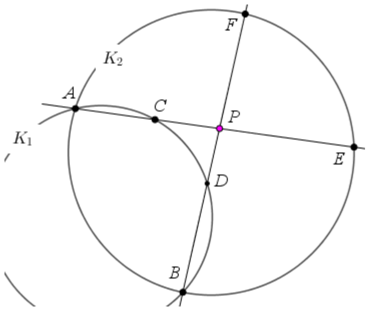
Omdat $CD = 6s$, $CE = 2s$, $CA = 4s$ is, is $CB = 3s$. Gevolg: B valt samen met O.
De lengte van het raaklijnstuk uit P aan (X) is dan (analoog aan de constructie in figuur 7) via de (halve) Thales-cirkel op AB te construeren. Dit geeft dan via (P; PP') de raakpunten T_s, T_s' op de lijn l_s.
Met de loodlijnen in die punten op l_s worden dan de punten X, X' eenvoudig geconstrueerd op de middelloodlijn van het lijnstuk AB.
De constructie van de gezochte (X) – en eventueel ook van (X') – is dan triviaal ◊

7. Noten

[1] Een **inversie** is een afbeelding van de punten van het euclidische vlak op zichzelf. Daarbij wordt een vaste cirkel gebruikt (middelpunt O, straal r). Voor ieder punt P ($\neq O$) ligt het beeldpunt P' op de halve lijn OP zo, dat $OP \cdot OP' = r^2$.
Voor meer informatie en de eigenschappen van de inversie zie op de website van de auteur:
http://www.pandd.demon.nl/inversie.htm
of op NL-WikipediA:
https://nl.wikipedia.org/wiki/Inversie_(meetkunde)

[2] Bij de beschrijving van de constructies wordt gebruik gemaakt van functies die ook voorkomen in interactieve meetkundeprogramma's zoals *GeoGebra* (*https://www.geogebra.org/?lang=nl-NL*).
Commentaar bij een constructiestap staat na het "teken" //.

[3] Die plaatsing was op 22 oktober 2020. Twee dagen later publiceerde ik op Facebook een handgeschreven berekening die grotendeels overeenkomt met hetgeen hierna in deze paragraaf is vermeld.

[4] 

De **secantstelling** komt overeen met de *machtstelling* bij een cirkel. Bij de machtsteling worden evenwel *gerichte* lijnstukken gebruikt; bij de secantstelling is dat *niet* het geval.

Voor het punt P dat buiten cirkel K_1 en binnen cirkel K_2 ligt, is volgens de secantstelling bij resp. K_1 en K_2:

· $PA \cdot PC = PB \cdot PD$ en $PA \cdot PE = PB \cdot PF$

Omgekeerd: als genoemde relaties gelden, dan zijn de punten A, B, C, D en A, B, E, F concyclisch.

[5] Hierbij wordt gebruikt dat voor het punt T, dat op de machtlijn van K en K_2 ligt, geldt (*gelijke raaklijnstukken*):

· $TO = TB = TC$

Dat $\angle MTM_2 = 90^\circ$ is, volgt uit het feit dat TM en TM_2 diagonalen zijn van opvolgend de vliegers $MCTB$ en M_2OTB.

[6] Naar Apollonius van Perga (~262 – ~190 v.Chr., Griekenland (tegenwoordig Turkije)). Het raakprobleem bestaat eigenlijk uit het construeren van *alle* cirkels die aan de drie gegeven cirkels raken.

[7] Zie voor een behandeling van het raakprobleem van Apollonius op de website van de auteur:
http://www.pandd.demon.nl/raakprob.htm
of bijvoorbeeld:
P. Wijdenes: *Vlakke meetkunde voor voortgezette studie*. Groningen: P. Noordhoff N.V.; blz. 253-270 (1964, 3e druk).

[8] In deze paragraaf schrijf ik (X) voor een cirkel met middelpunt X. Is ook de straal x van de cirkel van belang, dan wordt dat $(X; x)$.
De betekenis van bijvoorbeeld $(Y) = (X; x)$ is: het middelpunt van (Y) is het punt X en de straal ervan is x.