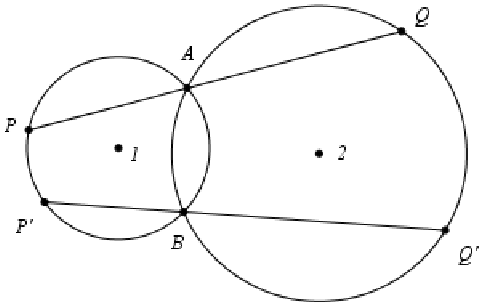
Cirkels van Reim

DICK KLINGENS (email: *dklingens@gmail.com*)

mei 2015 / september 2017

1. Twee cirkels

figuur 1



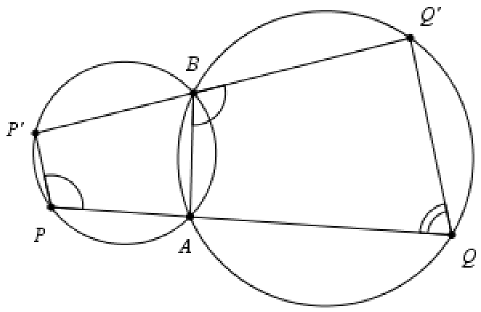
In figuur 1 gaan de lijnen PQ en $P'Q'$ door de snijpunten A en B van twee cirkels. Deze punten noemen we hier *basispunten*.
De middelpunten van deze cirkels zijn genummerd; dus niet, zoals gebruikelijk, van een naam voorzien.
Notatie voor de cirkels zelf: (1) en (2).

De lijnstukken PQ en $P'Q'$ zijn zogeheten *dubbelkoorden* van de cirkels. Notatie: PAQ en $P'BQ'$.
Bij een dubbelkoorde staat dus ook het basispunt in de naam.
Is de hoek bij het basispunt *niet gelijk* aan 180°, dan spreken we (zoals gebruikelijk) van een *gebroken lijnstuk*. We noteren zo'n lijnstuk dan als [PAQ].
De cirkels in een configuratie als die in figuur 1 worden wel *cirkels van Reim* genoemd (naar Anton Reim, 1832-1922, Duits Bohemen / Sudetenland).

We bewijzen nu:

Stelling 1 (**stelling van Reim**). Bij twee gegeven cirkels met basispunten A en B en dubbelkoorde PAQ geldt (zie de figuren 2a en 2b): [$P'BQ'$] is een dubbelkoorde *dan en slechts dan als PP' // QQ'*.

figuur 2a



Bewijs. **1)** Stel $P'BQ'$ is een dubbelkoorde.

In de koordenvierhoek $ABP'P$ is:

$\angle P$ = buitenhoek $\angle B$ (notatie: b$\angle B$)

In koordenvierhoek $ABQ'Q$ is:

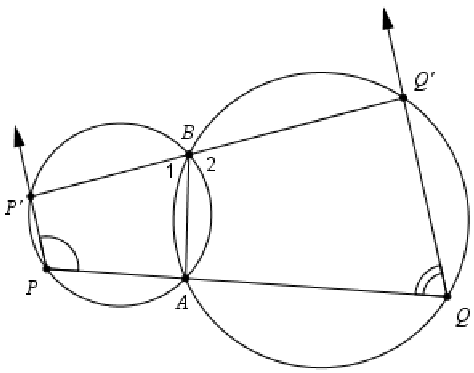
$\angle B + \angle Q = 180°$

Zodat, kijkend naar beide koordenvierhoeken:

$\angle P + \angle Q = 180°$

En dan is: PP' // QQ' (*binnenhoeken*)

figuur 2b



2) Stel PP' // QQ'; zie figuur 2b.

In koordenvierhoek $ABP'P$ is:

$\angle B_1 + \angle P = 180°$

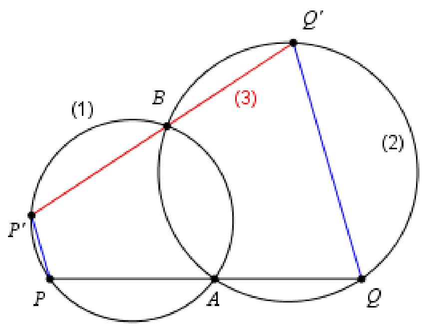
In koordenvierhoek $ABQ'Q$ is:

$\angle Q + \angle B_2 = 180°$

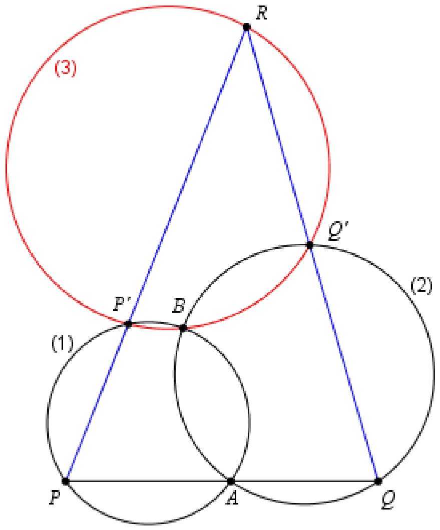
Uit PP' // QQ' volgt: $\angle P + \angle Q = 180°$
Zodat: $\angle B_1 + \angle B_2 = 180°$
Met andere woorden: $P'BQ'$ is een dubbelkoorde van de Reim-cirkels. ◊

Opmerking. In figuur 3a (links) zien we opnieuw de hierboven bekeken configuratie.
In figuur 3b (rechts) is de dubbelkoorde $P'BQ'$ uit figuur 3a vervangen door een cirkel, in beide figuren aangegeven met (3). Door deze vervanging krijgen we enig inzicht in het gedrag van het 'snijpunt' R van de evenwijdige lijnen PP' en QQ' in figuur 3a.

figuur 3a

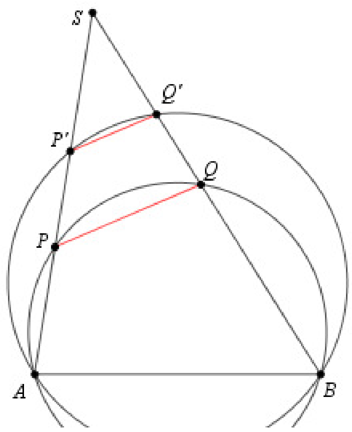


figuur 3b

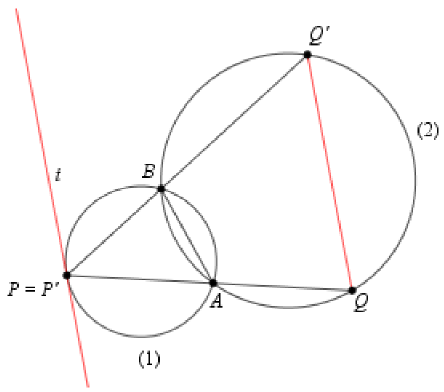


In figuur 3a gaat de 'cirkel' door de punten P', B en Q' door het *oneigenlijk* punt R van de evenwijdige lijnen PP' en QQ'.
Bewijs? $\angle R$ ($\equiv \angle(PP', QQ')$) = 0° en $\angle B$ = 180°. De 'vierhoek' $P'BQ'R$ is 'dus' een (ontaarde) koordenvierhoek.
We zullen de situatie als in figuur 3b hierna in stelling 2a (paragraaf 2) opnieuw tegenkomen en bewijzen. ◊

figuur 4a



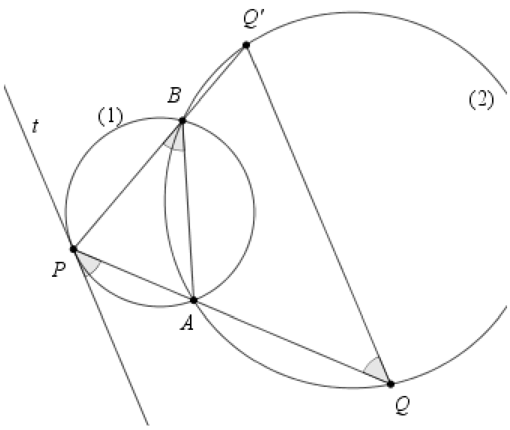
figuur 4b



Een iets andere kijk op het onderhavige probleem wordt geïllustreerd in figuur 4a.
We kunnen deze configuratie, conform stelling 1, als volgt formuleren:
Twee cirkels die door twee dezelfde hoekpunten A, B van een driehoek ABS gaan, snijden de zijden door het derde hoekpunt AS en BS met evenwijdige koorden.

Ook in figuur 4b staat een bijzondere configuratie van de cirkels (1) en (2) van Reim. In die figuur vallen van de dubbelkoorden PAQ en $P'BQ'$ de punten P en P' samen.
De lijn PQ is daardoor overgegaan in de raaklijn t in P aan (1), zodat: $t \mathbin{//} QQ'$.
Deze eigenschap kunnen we formuleren als:
Snijden twee dubbelkoorden elkaar op een Reim-cirkel, dan is de raaklijn in dat snijpunt aan die Reim-cirkel evenwijdig met de verbindingslijn van de andere eindpunten van de beide koorden.

figuur 4c



Een bewijs van dit laatste.

Bij (1) is t raaklijn in P. Dan is:

$\angle(t, PQ) = ½\text{bg}(AP) = \angle B$

In de koordenvierhoek $AQQ'B$ in (2) is:

$\angle B + \angle Q = 180^\circ$

Dus is:

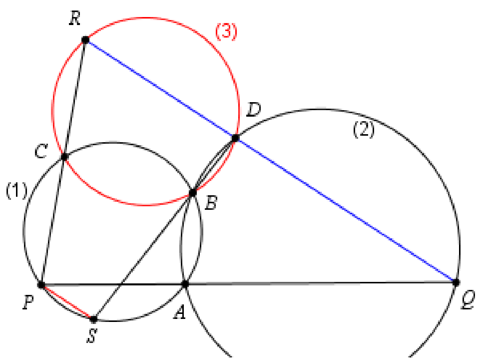
$\angle P = \angle Q$

En daarmee is $t \,//\, QQ'$ omdat P en Q *verwisselende binnenhoeken* zijn. ◊

2. Drie cirkels

En nu voegen we aan twee cirkels van Reim een derde cirkel aan toe. Die derde cirkel gaat (eerst) door één van de gemeenschappelijk punten van de eerste twee: in figuur 5 is voor het punt B gekozen.

figuur 5



De punten C en D zijn de tweede snijpunten van (3) met (1) en van (3) met (2).
Verder is PCR een dubbelkoorde van (1) en (3).

We zullen nu bewijzen:

≡ [QDR] is een dubbelkoorde van (2) en (3).

Bewijs. De lijn DB snijdt (1) ook in het punt S. Nu zijn PCR en SBD dubbelkoorden van (1) en (3), zodat volgens stelling 1: $PS \,//\, DR$

PAQ en SBD zijn dubbelkoorden van (1) en (2), zodat, ook weer volgens stelling 1:

$PS \,//\, DQ$

Met de transitiviteit van // is: $DR \,//\, DQ$

Volgens Euclides' 5e postulaat gaat er precies één lijn door D die evenwijdig is met DQ. En dit houdt in dat $\angle QDR = 180°$.

Met andere woorden: [QDR] is een dubbelkoorde van (2) en (3). ◊

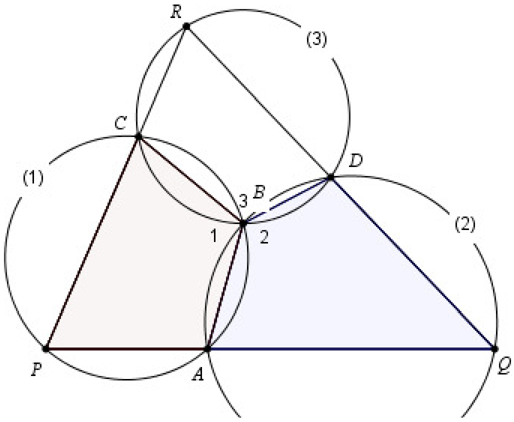
In feite hebben we zojuist de *stelling van Miquel* bewezen (naar Auguste Miquel, 1816-1851, Frankrijk) die deze eigenschap in 1838 publiceerde.[1]

Stelling 2a (**stelling van Miquel**). Hebben de cirkels (1), (2) en (3) een punt B gemeenschappelijk, is, naast B, (1) & (2) = A, (1) & (3) = C, snijdt PA (2) in Q, snijdt PC (3) in R, dan zijn de punten Q, D en R collineair.

De omgekeerde van stelling 2a laat zich wat duidelijker formuleren (zie weer figuur 5):

Stelling 2b. Is PQR een driehoek en zijn de punten A, D en C willekeurige punten op (opvolgend) de zijden PQ, QR en RP, dan gaan de cirkels (PAC) ≡ (1), (QBA) ≡ (2) en (RCD) ≡ (3) door één punt B (het *punt van Miquel* bij de configuratie PQR/ADC).

figuur 6



Bewijs. We tonen de juistheid van stelling 2b aan met behulp van koordenvierhoeken.

We stellen dat B het tweede snijpunt is van (1) en (2).

We zullen aantonen dat (3) ook door B gaat.

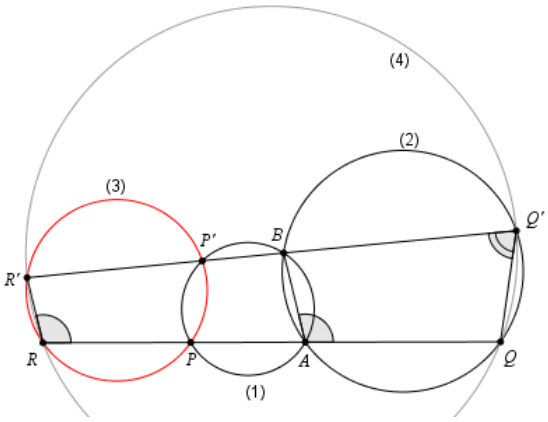
Bij B zijn in figuur 6 de hoeken aangegeven met indices (1, 2, 3). Daarbij is dan:

$$\angle ABC = \angle B_1,\ \angle ABD = \angle B_2 \text{ en } \angle DBC = \angle B_3$$

In koordenvierhoek $ABCP$ is: $\angle P + \angle B_1 = 180°$
In koordenvierhoek $ABDQ$ is: $\angle Q + \angle B_2 = 180°$
Opgeteld: $\angle P + \angle Q = 360° - (\angle B_1 + \angle B_2) = \angle B_3$
En in driehoek ABC is: $\angle P + \angle Q = 180° - \angle R$
zodat: $\angle B_3 = 180° - \angle R$ of $\angle B_3 + \angle R = 180°$
Hieruit blijkt dat vierhoek $BDRC$ eveneens een koordenvierhoek is.
En (3) gaat daarmee door het punt B. ◊

Zo'n derde cirkel kan ook *op een andere manier* aan twee cirkels van Reim worden toegevoegd. In figuur 7 gaat (3) door de punten P en P'. De lijn QP snijdt (3) ook in R, de lijn $Q'P'$ snijdt (3) ook in R'.

figuur 7



In dit geval kunnen we bewijzen:

≡ De punten Q, R, Q' en R' zijn concyclisch.

Bewijs. Met P en P' als basispunten van (1) en (3) zijn $BP'R'$ en APR dubbelkoorden, zodat:

$RR' \,//\, AB$

Daardoor zijn de hoeken R en A (zie de hoekbogen; *overeenkomstige hoeken*) gelijk.

In koordenvierhoek $AQQ'B$ is $\angle A + \angle Q' = 180°$. Met $\angle R = \angle A$ is dan in vierhoek $RQQ'R'$:

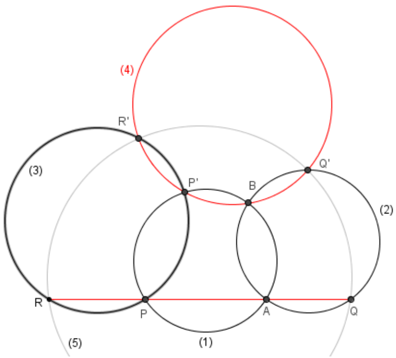
$$\angle R + \angle Q' = 180°$$

Daardoor is $RQQ'R'$ een koordenvierhoek.
Met andere woorden: de punten R, Q, Q' en R' zijn concyclisch, op (4). ◊

Opmerking. Cirkel (4) vormt dus niet alleen met (3) een cirkelpaar van Reim, maar ook met (2). ◊

3. Vier cirkels

figuur 8



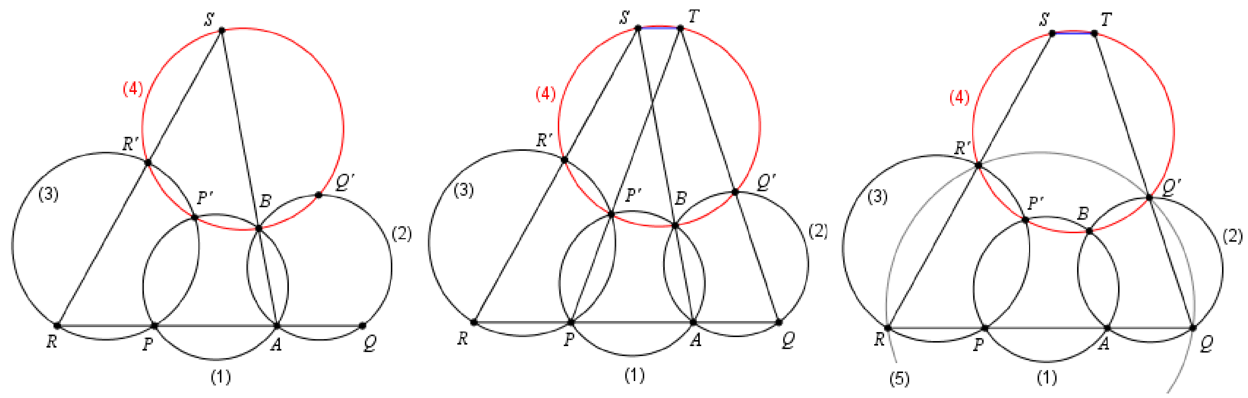
Aan de laatste configuratie in paragraaf 3, figuur 7, voegen we een vierde cirkel toe. Deze cirkel, aangegeven met (4), gaat door de punten P' en B.
PAQ is ook hier een dubbelkoorde van (1) en (2). De lijn PQ snijdt (3) ook in R.
De punten Q' en R' zijn de tweede snijpunten van (4) met (2) en (3).

We zullen nu bewijzen [2]:

≡ De punten Q, Q', R en R' zijn concyclisch.

Bewijs. We geven het bewijs in drie stappen.

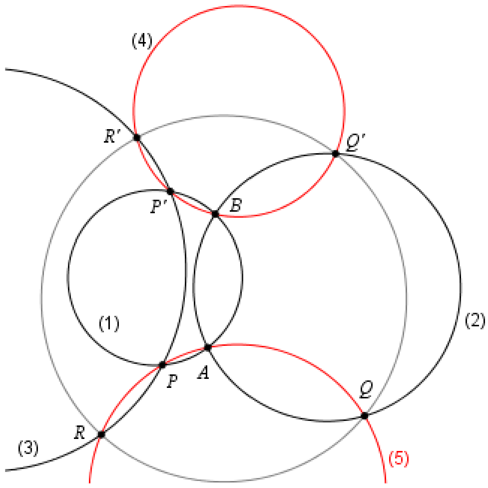
figuur 9



1) Zie figuur 9a. Het tweede snijpunt van PR' met (4) is S.
Volgens de stelling van Miquel [3] toegepast op $ASR/BR'P$ is nu ABS een dubbelkoorde van (1) en (4).
2) Zie figuur 9b. T is het tweede snijpunt van QQ' met (4).
Volgens de stelling van Miquel toegepast op $PQT/AQ'P'$ is nu $PP'T$ een dubbelkoorde van (2) en (4).
De cirkels (1) en (4) met basispunten B en P' zijn nu cirkels van Reim. Uit het feit dat $PP'T$ en ABS dubbelkoorden zijn van deze cirkels, volgt dat PA // ST, of ook QR // ST.
3) Zie figuur 9c. Nu bekijken we cirkel (4) met basispunten Q' en R' en de 'nieuwe' dubbelkoorden $SR'R$ en $TQ'Q$. Daarbij geldt dat QR // ST is, zodat we op basis van stelling 1 kunnen concluderen dat de punten Q, Q', R en R' concyclisch zijn. ◊

4. Vijf cirkels

figuur 10



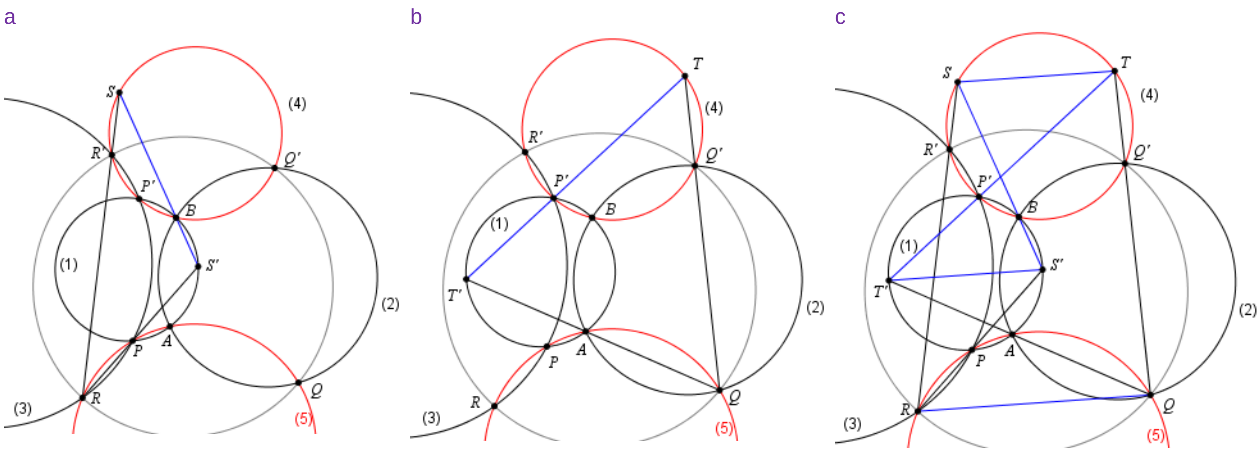
Ook nu voegen we een nieuwe cirkel aan een bestaande configuratie van vier cirkels toe door een rechte lijn (een drager van een dubbelkoorde) te vervangen door een cirkel. [4]
De lezer vergelijke daartoe figuur 10 met figuur 8: de lijn AP in figuur 8 is in figuur 10 vervangen door cirkel (5).

In de figuur die nu bestaat uit de cirkels (1), …, (5) geldt:

≡ De punten Q, Q', R en R' zijn concyclisch.

Bewijs. We geven het bewijs in drie stappen; bij elke stap staat weer een afzonderlijke figuur.

figuur 11



1) In figuur 11a is $S = RR'$ & (4) en $S' = RP$ & (1).
Volgens stelling 2 is in de Miquel-configuratie $RS'S/PBR$ de lijn SBS' een dubbelkoorde van de cirkels (4) en (1).
2) In figuur 11b is $T = QQ'$ & (4) en $T' = QA$ & (1).
Volgens stelling 2 is in de Miquel-configuratie $QT'T/APQ'$ de lijn $T'P'T$ een dubbelkoorde van de cirkels (4) en (1).
3) Zie figuur 11c. Daarin is volgens stelling 1, toegepast op (1) en (4):

$$ST \,//\, S'T'$$

En ook volgens stelling 1, toepast op (1) en (5):

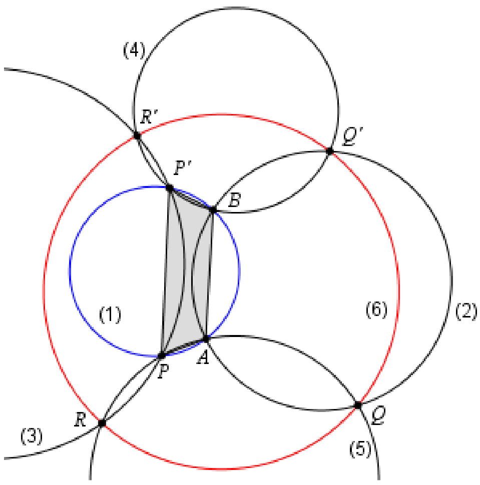
$$S'T' \,//\, QR$$

Zodat vanwege de transitiviteit van // geldt: $ST \,//\, QR$
Bij (4) met basispunten Q' en R' en met koorden $RR'S$ en $QQ'T$ is er dan een cirkel die door Q', R' en door Q, R gaat (weer volgens stelling 1).
En daarmee is het gestelde aangetoond: de punten Q, Q', R en R' zijn concyclisch. ◊

5. Zes cirkels

We kunnen de configuratie van de zes cirkels die nu zijn ontstaan, in een iets ander licht zetten.

figuur 12



We beschouwen in figuur 12 de koordenvierhoek $APP'B$.

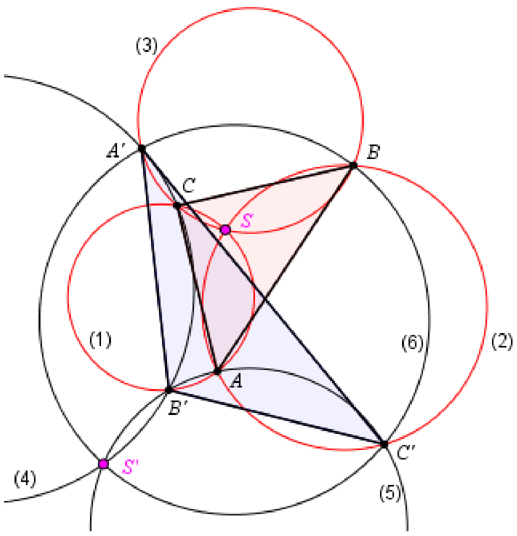
De cirkels (2), …, (5) hebben opvolgend de lijnstukken BA, PP', $P'B$ en AP, d.w.z. de zijden van de vierhoek, als koorde.
En (1) is de omcirkel (omgeschreven cirkel) van $APP'B$.

We kunnen dit dus formuleren als:

Stelling 3. Vier cirkels die elk de zijde van een koordenvierhoek als koorde hebben, snijden elkaar (buiten de omcirkel) in vier punten die concyclisch zijn.

Maar er is ook een andere mogelijkheid om de zes cirkels te bekijken, namelijk met twee driehoeken als uitgangspunt.
In figuur 13 zijn de zes punten, in vergelijking met die in (bijvoorbeeld) figuur 12, van een andere naam voorzien. Daarmee worden dan de driehoeken ABC en $A'B'C'$ vastgelegd.
Verder zijn de namen van de cirkels (3) en (4) verwisseld.

figuur 13



De cirkels (1), (2) en (3) zijn de omcirkels van de driehoeken:

$AB'C$, ABC', $A'BC$

Deze cirkels hebben het punt S gemeenschappelijk.

De cirkels (4), (5), (6) zijn de omcirkels van de driehoeken:

$A'B'C$, $AB'C'$, $A'BC'$

Deze cirkels hebben het punt S' gemeenschappelijk.

We kunnen nu vaststellen (bewijzen hoeft niet meer):

Stelling 4a. De cirkels (1), (2) en (3) gaan door hetzelfde punt *dan en slechts dan als* de cirkels (4), (5) en (6) door hetzelfde punt gaan.

Of ook, met iets meer nadruk op de driehoeken, en op het willekeurig zijn van de driehoeken ABC en $A'B'C'$:

Stelling 4b. De omcirkels van de driehoeken $AB'C$, ABC', $A'BC$ gaan door hetzelfde punt *dan en slechts dan als* de omcirkels van de driehoeken $A'B'C$, $AB'C'$, $A'BC'$ door hetzelfde punt gaan.

Opmerking. Als we afspreken dat bij de accentuering van de namen de onderstaande regels gelden, dan is de formulering van stelling 4b met betrekking tot de accenten wellicht iets duidelijker (en wat gemakkelijker te onthouden):

- $(A)' = A'$
- $(A')' = A$
- $(AB'C')' = A'BC$, als voorbeeld ◊

6. Noten

[1] In hetgeen volgt betekent $X = p$ & q: het punt X is een snijpunt van de meetkundige objecten p en q.

[2] Zie ook:
-- Henri Lesbesgue (1916): *Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford*. In: *Nouvelles annales de mathématiques*; 4e série, tome 16, pp. 481-495.

[3] Met *ABC*/*XYZ* wordt bedoeld: een zogeheten Miquel-configuratie met driehoek *ABC*, waarbij de punten *X*, *Y*, *Z* liggen op de zijden *AB*, *BC*, *CA*.

[4] Zie ook:
-- Auguste Miquel (1844): *Mémoire de Géométrie* (*deuxième partie*). In: *Nouvelles annales de mathématiques*; 1e série, tome 10, pp. 347-348.

