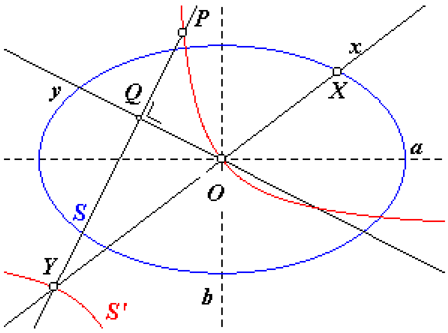
Apollonius-hyperbool en normalen van een kegelsnede

Apollonius-hyperbool

We gaan uit van een ellips (of hyperbool) S met middelpunt O. P is een vast punt. X is een willekeurig punt van S. De lijnen $x = OX$ en y zijn toegevoegde middellijnen van S (**zie figuur 1**).
De loodlijn PQ met Q op y snijdt de lijn x in het punt Y.
Het is duidelijk dat er nu een 1-1-relatie is tussen de lijnen van de lijnenbundels met toppen P en O. Immers, is PY bekend, dan is via de loodlijn y op PY ook $OX = x$ eenduidig bepaald; omgekeerd, is $OX = x$ bekend, dan is ook y en daardoor ook PY vastgelegd..

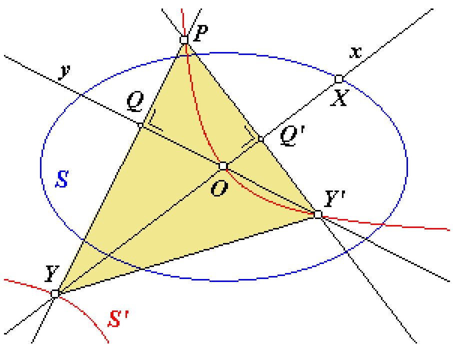
Figuur 1



De meetkundige plaats van de punten Y (als X de kegelsnede S doorloopt) is dus een kegelsnede S' door de punten P en O.
Als OX samenvalt met de as a (de as b) van S, dan is Y het snijpunt van de oneigenlijke rechte met de as b (de as a).
S' is dus een *orthogonale* hyperbool, waarvan de asymptoten evenwijdig zijn met de assen van de gegeven kegelsnede S.
S' wordt de **Apollonius-hyperbool** van P bij de kegelsnede S genoemd (naar *Apollonius van Perga*, ~262 - ~190 v.Chr.).

Opmerking. Is PQ' de loodlijn uit P op x en snijdt PQ' de lijn y in het punt Y', dan ligt ook Y' op S'.
Immers, de lijnen x en y zijn toegevoegde middellijnen, waardoor we de rol van de lijnen x en y kunnen verwisselen.

Figuur 2

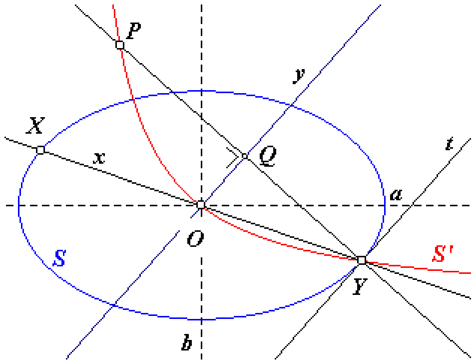


Zie figuur 2. Het punt O is nu hoogtepunt van driehoek PYY'. Hiermee hebben we (opnieuw) laten zien, dat een orthogonale hyperbool die door de hoekpunten van een driehoek gaat, ook gaat door het hoogtepunt van die driehoek.

Normalen

We bekijken nu de snijpunten van de kegelsneden S en S'.

Figuur 3



Is Y nu zo'n snijpunt (**zie figuur 3**). Omdat (nog steeds) x en y toegevoegde middellijnen zijn, is de raaklijn t in Y aan S evenwijdig met de middellijn y. Dus: de lijn PY staat loodrecht op t. PY is dus een normaal van S.
Zodat:

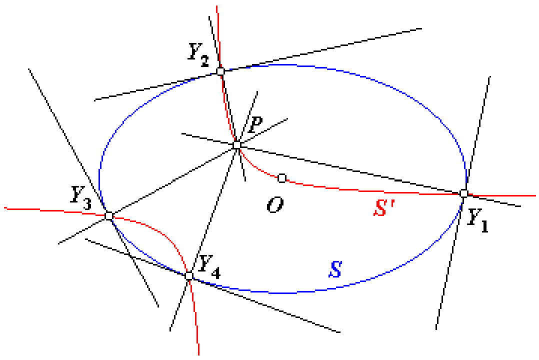
Stelling 1. De voetpunten van de door een vast punt gaande normalen van een ellips of een hyperbool, liggen op een orthogonale hyperbool waarvan de asymptoten evenwijdig zijn met de assen van die kegelsnede.

Zoals we zullen zien – in de paragraaf Parabool – geldt stelling 1 ook voor een parabool.

Omdat S en S' ten hoogste vier (reële) snijpunten hebben, geldt (**zie figuur 4**):

Stelling 2. Door een vast punt gaan ten hoogste vier normalen van een ellips of hyperbool.

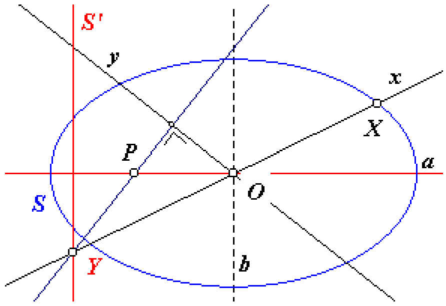
Figuur 4



Ontaarding

Zie figuur 5. Ligt het vaste punt P op een van de assen van de kegelsnede S, dan liggen er drie punten van de rechte lijn OP op de hyperbool: O, P en het snijpunt van PO met de oneigenlijke rechte.

Figuur 5

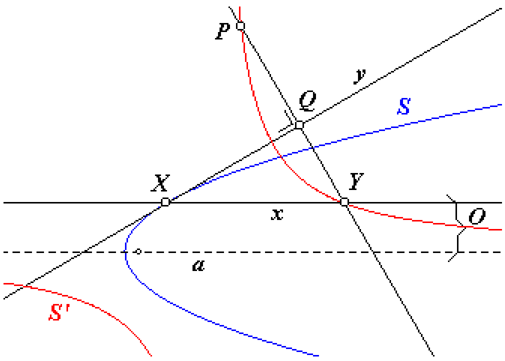


De hyperbool *S'* is nu ontaard in twee rechte lijnen, namelijk de as *PO* en, omdat de hyperbool orthogonaal is, een daarop loodrecht staande lijn.

Parabool

Is de gegeven kegelsnede *S* een parabool, dan moeten we een en ander aanpassen (**zie figuur 6**). Het centrum *O* van *S* is dan het oneigenlijk punt van de as *a* van de parabool. Is nu *X* een punt van *S*, dan is de lijn *x* die evenwijdig is met *a* een middellijn van *S*. De raaklijn *y* in *X* aan *S* kiezen we dan als aan *x* 'toegevoegde' middellijn. De loodlijn *PQ* op *y* snijdt de lijn *x* in het punt *Y*.
We beschouwen nu de lijnenbundels met toppen *P* en *O*. Als *X* de parabool *S* doorloopt, is er wederom een 1-1-relatie tussen de lijnen *PY* en *OY*. Ook nu is de meetkundige plaats van het punt *Y* dus een kegelsnede *S'* die door *P* en *O* gaat.

Figuur 6

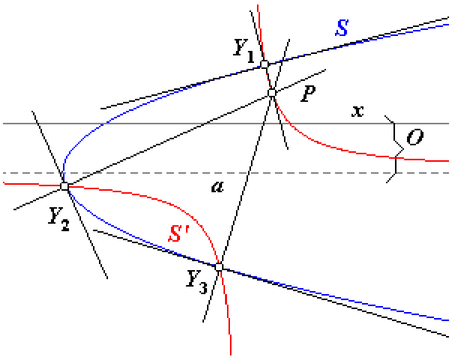


Als *X* samenvalt met *O* (op de oneigenlijke rechte), dan ligt het bijbehorende punt *Q* – we noemen dat punt hier Q_X – ook op de oneigenlijke rechte, en wel zo, dat
$(XQ_XIJ) = (OQ_XIJ) = -1$
Hierbij zijn *I* en *J* de zogenoemde cirkelpunten.
De kegelsnede *S'* heeft dus twee snijpunten, namelijk *O* en Q_X , met de oneigenlijke rechte, en is dus eveneens een orthogonale hyperbool. De asymptoten van die hyperbool zijn de as van de parabool en een lijn evenwijdig met de topraaklijn van die parabool.
Zodat, zoals we al eerder opmerkten, stelling 1 ook geldt voor een parabool. ☐

Stelling 3. Door een vast punt gaan maximaal drie normalen van een parabool.

Bewijs:
Zie figuur 7. De parabool *S* en de hyperbool *S'* snijden elkaar nu ook in ten hoogste 4 punten, waaronder het (niet-reële) punt *O*, waarin de normaal niet gedefinieerd is. Er zijn dus ten hoogste 3 reële snijpunten.

Figuur 7



Waarmee de stelling 3 bewezen is. ☐