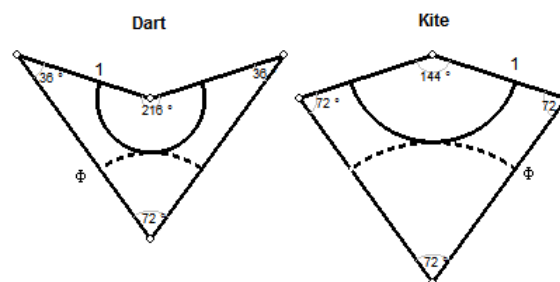


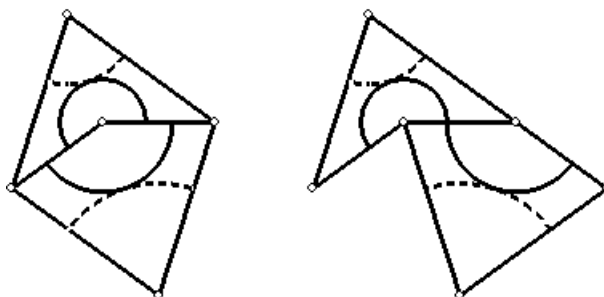
## Penrose-betegelingen met Cabri Geometry

Er bestaan veelhoeken waarmee geen regelmatige betegelingen (vlakverdelingen)<sup>[1,2]</sup> gemaakt kunnen worden. Bekende veelhoeken met die eigenschap zijn de zogenoemde **Penrose-tegels**, naar **Roger Penrose** (1931, Engeland) die ze in 1974 ontdekte. Deze tegels noemen we (en we gebruiken hier hun Engelse naam) naar hun vorm 'dart' (pijl) en 'kite' (vlieger). Op de tegels is een gekleurd motief aangebracht, en alleen die betegelingen die de overeenkomstige motieven op elkaar laten aansluiten, zijn toegelaten. De beide tegels zijn vierhoeken waarvan de hoeken een veelvoud zijn van  $\theta = 36^\circ$  en waarvan twee zijden de lengte 1 en twee zijden de lengte  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , het 'gouden' getal<sup>[3]</sup>, hebben. Het in **figuur 1a** gebruikte motief is afkomstig van **John Conway** (1937, Engeland). Het motief bestaat uit twee cirkelbogen die elk een kleur vastleggen (hier zwart en gestreept). Bij een (volledige) betegeling zijn de krommen die via deze cirkelbogen worden opgebouwd, invariant bij een rotatie over  $\theta$ .

*Figuur 1a - De beide Penrose-tegels*



*Figuur 1b – Een niet-toegelaten aansluiting (links) en een toegelaten aansluiting (rechts)*



De constructie van elk van de tegels vereist nogal wat stappen. Daarom geven we hieronder enkele macro-constructies opdat kopieën van de tegels eenvoudig op het Cabri-tekenblad kunnen worden geplaatst.

Een macro-constructie (kortweg macro) is gebaseerd op twee deelverzamelingen van de objecten waaruit de tekening bestaat: beginobjecten en eindobjecten. Vanuit de beginobjecten worden op eenduidige wijze, via een aantal tussenstappen, de eindobjecten geconstrueerd. Ligt de definitie van de macro eenmaal vast, dan heeft de gebruiker de beschikking over een nieuwe functie die is opgenomen in het *Macro*-menu van Cabri. Deze functie vraagt dan om selectie van objecten die overeenkomen met de beginobjecten van de macro. Na deze selectie worden de eindobjecten gereproduceerd overeenkomstig de definitie van de macro.

Bij de definitie van de macro krijgt deze een naam en eventueel een 'eigen' icoon. Indien gewenst kan de macro voor later gebruik worden opgeslagen op disk. Om een macro te kunnen gebruiken



[Lijn]Lijn en vervolgens de loodlijn in  $A$  op  $AB$  met [Constructie]Loodlijn. Vervolgens tekenen we een cirkel met [Cirkel]Cirkel, waarbij we  $A$  als middelpunt kiezen ('Dit middelpunt') en  $B$  als punt van de omtrek ('door dit punt op de omtrek').

En dan is het punt  $C$  een snijpunt van die cirkel met de loodlijn op  $AB$ : via [Punt]Punt kiezen we het snijpunt 'boven' de lijn  $AB$ .

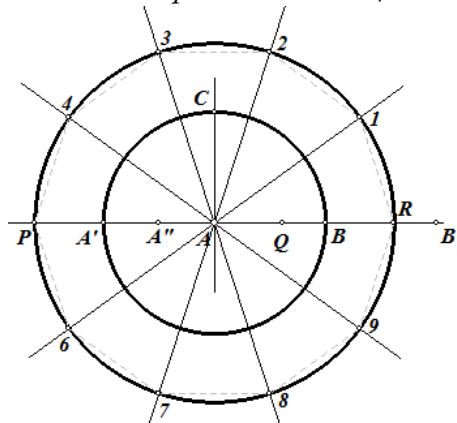
We zullen nu de cirkel verdelen in 10 gelijke bogen.  $B'$  is het puntspiegelbeeld van  $A$  in  $B$ , en  $A'$  is puntspiegelbeeld van  $B$  in  $A$ . Beide punten tekenen we met [Afbeeldingen]Puntspiegeling, waarbij we eerst het te spiegelen punt selecteren en daarna het centrum van de spiegeling.

Op de lijn  $AB$  kunnen we nu een coördinatenstelsel<sup>[5]</sup> vastleggen met  $A$  als oorsprong, met  $x = 0$ , en  $B$  met  $x = 1$ . Dan geldt voor  $B'$  dat  $x = 2$  en voor  $A'$  dat  $x = -1$ . We hebben ook het midden  $A''$  van het lijnstuk  $AA'$  nodig. Dit punt tekenen we met [Constructie]Midden. Voor  $A''$  is dan  $x = -\frac{1}{2}$ .

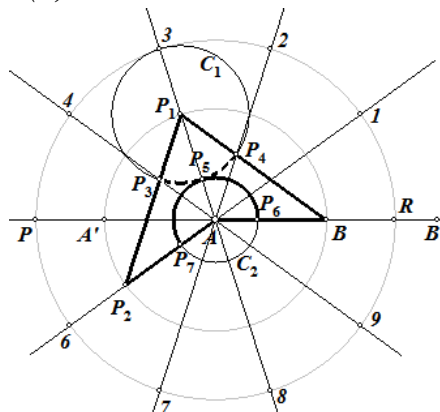
De cirkel met middelpunt  $A''$  die door  $C$  gaat, snijdt de lijn  $AB$  in het punt  $P$  (links van  $A$ ) en in het punt  $Q$  (rechts van  $A$ ). Voor  $P$  en  $Q$  hebben we dan opvolgend  $x = -\phi$  en  $x = \phi - 1$ . De loodlijnen in  $P$  en  $Q$  op de lijn  $AB$  snijden nu de cirkel met middelpunt  $A$  die door  $B'$  gaat, in de punten  $J_2, J_4, J_6, J_8$ . Dit zijn de hoekpunten van een regelmatige vijfhoek waarvan  $B'$  het vijfde hoekpunt is. De regelmatige tienhoek kan nu worden gevonden via puntsymmetrie in het punt  $A$  van de vier gevonden punten  $J_k$ .

Vervolgens tekenen we de cirkel met middelpunt  $A$  die door  $P$  gaat; zie daartoe **figuur 5**. We verbergen daarbij een aantal objecten die we niet meer nodig hebben met [Layout]Verberg/Toon.

*Figuur 5 - Verdeling van de cirkel met middelpunt  $A$  en straal  $\phi$  in 10 gelijke bogen*



*Figuur 6 - Constructie van Dart1(A)*



De hoekpunten van de regelmatige tienhoek op de cirkel met straal  $\phi$  zijn aangegeven met  $R, 1, 2, \dots, 9$ . **Figuur 5** is nu de basis voor de verdere constructie die we voorzetten in **figuur 6**.

We construeren de punten  $P_1$  en  $P_2$  met [Punt]Punt als snijpunten van de cirkel met middelpunt  $A$  (die door  $B$  gaat) opvolgend met de lijn door  $A$  en  $3$  en met de lijn door  $A$  en  $6$ . Vervolgens construeren we met [Lijn]Veelhoek de vierhoek  $ABP_1P_2$ , een dart-tegel.

Voor de cirkelmotieven construeren we de cirkel  $C_1$  (middelpunt  $P_1$ , door  $3$ ) die de lijn door  $A$  en  $3$  in  $P_3$  snijdt.  $C_1$  snijdt de zijden  $P_1P_2$  en  $P_1B$  van de tegel in opvolgend  $P_3$  en  $P_4$ .

De cirkel  $C_2$  (middelpunt  $A$ , door  $P_3$ ) snijdt dan de lijn door  $A$  en  $R$  en die door  $A$  en  $6$  in opvolgend  $P_6$  en  $P_7$ .

De motieven  $P_4P_5P_3$  en  $P_6P_5P_7$  tekenen we vervolgens met [Cirkel]Cirkelboog.

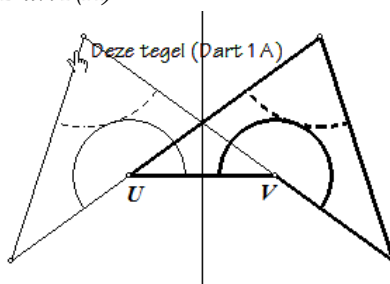
**Definitie macro Dart1(A).** We kunnen nu de macro definiëren. Kies daartoe [Macro]Beginobjecten en selecteer (in deze volgorde) de punten  $A$  en  $B$ . De selectievolgorde is belangrijk; bij het gebruik van de macro moeten de objecten (in dit geval dus punten) namelijk in dezelfde volgorde worden gekozen.

Verberg vervolgens met [Layout]Verberg/Toon de punten  $P_3, \dots, P_7$ . Kies dan [Macro]Eindobjecten en selecteer de vierhoek en de beide cirkelbogen. De macro wordt nu vastgelegd met [Macro]DefinieerMacro. We geven de macro daarbij de naam 'Dart1(A)'. Ook kan er eventueel een icon worden getekend en kunnen enkele regels worden toegevoegd als hulp bij het gebruik van de macro. Aan het eerste eindobject kan ook een naam worden gegeven, bijvoorbeeld 'Deze tegel (Dart 1 A)'.

Is de macro vastgelegd, dan is een nieuwe functie in het menu [Macro] beschikbaar.

Op een nieuw tekenblad plaatsen we met [Punt]Punt de punten  $U$  en  $V$ , en kiezen vervolgens [Macro]Dart1(A). Met de selectie van de punten  $U$  en  $V$  tekent de macro op het lijnstuk  $UV$  een dart; zie **figuur 7**, waarin de dart is aangegeven met 'Dart 1 A'.

*Figuur 7 - Gebruik van de macro Dart1(A)*

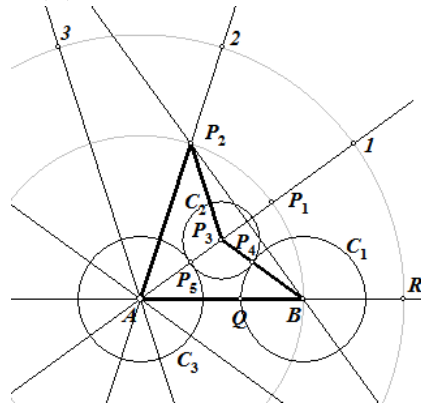


Deze figuur kunnen we gebruiken voor de definitie van de macro Dart1(B). We tekenen met [Constructie]Middelloodlijn de middelloodlijn van het lijnstuk  $UV$ : selecteer daartoe de punten  $U$  en  $V$ . Met [Afbeeldingen]Spiegeling tekenen we nu de spiegelbeelden van de zojuist getekende tegel (van 'Dart 1 A' dus) en van de beide cirkelbogen. De macro Dart1(B) kan nu worden vastgelegd door de punten  $U$  en  $V$  (ook weer in deze volgorde) als beginobjecten en de spiegelbeelden (die van de tegel en van de cirkelbogen) als eindobjecten te selecteren.

Er is natuurlijk ook een dart-tegel waarbij  $AB = \phi$ . Deze tegel kunnen we tekenen door opnieuw gebruik te maken van **figuur 5**.

In **figuur 8**, die gebaseerd is op **figuur 5**, is  $P_1$  het snijpunt van de lijn door  $A$  en  $I$  met de cirkel met straal  $\phi$ .  $P_2$  is het snijpunt van die cirkel met de lijn door  $A$  en  $2$ .  $P_3$  is het spiegelbeeld van het punt  $P_1$  in de lijn  $BP_2$ . De bedoelde dart-tegel wordt dan gevormd door de vierhoek  $ABP_3P_2$ .

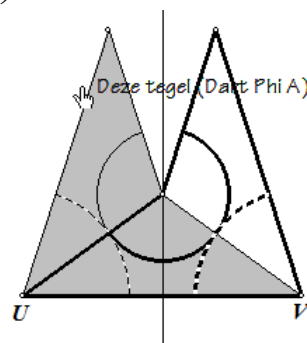
*Figuur 8 - Constructie van DartPhi(A)*



Cirkel  $C_1$  is de cirkel met middelpunt  $B$  die gaat door  $Q$ . Deze cirkel snijdt de zijde  $BP_3$  van de tegel in  $P_4$ . De cirkel  $C_2$  met middelpunt  $P_3$  die gaat door  $P_4$  is drager van één van de motieven van de tegel.  $C_2$  snijdt de lijn door  $A$  en  $I$  in het punt  $P_5$ . De cirkel  $C_3$  (middelpunt  $A$ , door  $P_5$ ) is drager van het tweede motief van de tegel.

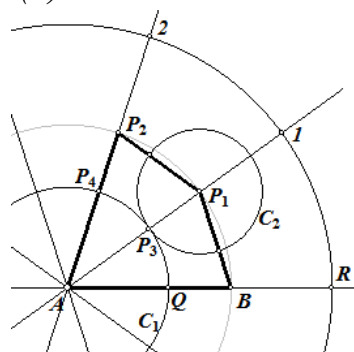
Op basis van de constructie in **figuur 8** kunnen we dan de macro  $\text{DartPhi}(A)$  vastleggen.

*Figuur 9 - Constructie van DartPhi(B)*



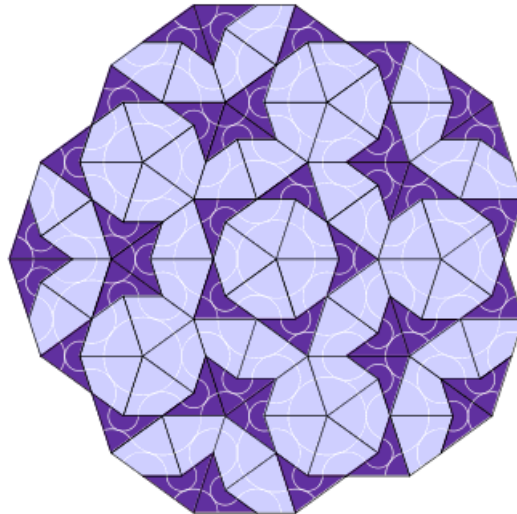
Met behulp van deze macro is dan ook de macro  $\text{DartPhi}(B)$  eenvoudig te definiëren. Zie daarvoor **figuur 9**, waarin wederom de middelloodlijn van het lijnstuk  $UV$  is gebruikt als spiegelas. De oorspronkelijke tegel ( $\text{Dart Phi A}$ ) is hierin grijs gemaakt.

*Figuur 10 - Constructie van KitePhi(A)*

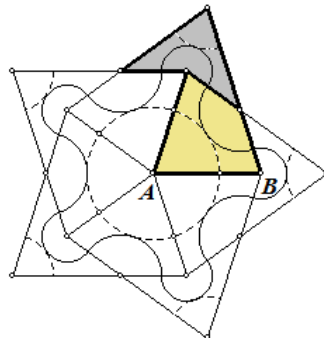


Geheel analoog aan het bovenstaande kunnen we nu de macro's Kite1(A), Kite1(B), KitePhi(A) en KitePhi(B) vastleggen. Zie daartoe **figuur 10**, waarin de objecten zijn aangegeven waarop de macro KitePhi(A) is gebaseerd.

De macro's Dart1(A) en KitePhi(A) kunnen worden gebruikt voor een Penrose-betegeling die bekend staat onder de naam 'Sun' (de basis van deze betegeling staat in **figuur 11**):

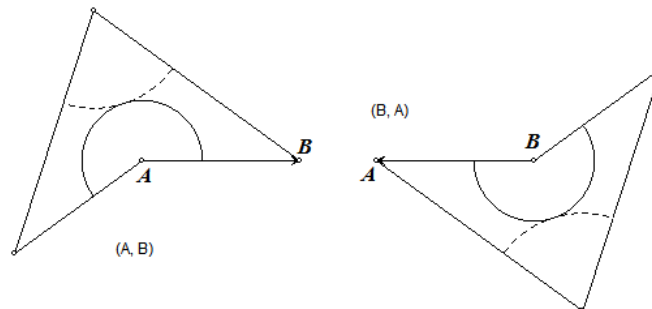


*Figuur 11 - Basis van de Sun-betegeling*



**Opmerking.** Zoals reeds is geschreven, hangt de uitvoering van de macro's af van de volgorde waarin de beginobjecten worden geselecteerd. In **figuur 12** is de macro Dart1(A) twee keer gebruikt. Links is de selectievолgorde van de beginobjecten ( $A, B$ ); rechts is de volgorde ( $B, A$ ).

*Figuur 12 - Volgorde beginobjecten*



We zien hieruit dat de Penrose-tegel met volgorde ( $A, B$ ) *links* van het gericht lijnstuk  $AB$  wordt opgebouwd. Is de volgorde ( $B, A$ ), dan wordt de Penrose-tegel *rechts* van het lijnstuk  $AB$  opge-

bouwd, waarbij één van de motieven dan bij het punt  $B$  wordt geplaatst. Dit is eveneens van toepassing op de andere hierboven behandelde macro's. □

### Opgave 1

Definieer zelf de macro's DartPhi(A), DartPhi(B) en de vier Kite-macro's.

### Opgave 2

Breid de Sun-betegeling van figuur 11 verder uit met behulp van Cabri-constructies.

### Opgave 3

Teken de zogenoemde Star-betegeling die bestaat uit 5 dart-tegels rond een centrum.

### Opgave 4

Geef de 7 configuraties die mogelijk zijn met Penrose-tegels rond een centrum.

## Verantwoording

Bovenstaand artikel is een vertaling en (verkorte) bewerking van 'Pavages de Penrose'. Deze Franse tekst wordt als aanvulling op de handleiding bijgeleverd bij Cabri Geometry II Plus, versie 1.3.

## Noten

- [1] Een 'intuïtieve' definitie: Een *regelmatige betegeling* is een patroon in het platte vlak dat ontstaat door eenzelfde figuur ('tegel' genoemd) zó te herhalen dat het hele vlak wordt opgevuld zonder dat de tegels elkaar overlappen en zonder dat daarbij 'tussenruimtes' ontstaan.
- [2] Engels: tessellations, en ook wel: tilings. Het Engelse 'tessellated' betekent geruit, en een 'tile' is een tegel.
- [3] Dit getal vinden we terug bij de verdeling van een lijnstuk in middelste en uiterste reden, de zogenoemde 'gulden snede' van dat lijnstuk.
- [4] De menu's van Cabri noteren we in hetgeen volgt tussen [ en ]. De standaard menu's van Cabri zijn opvolgend van links naar rechts: [Selecteren], [Punt], [Lijn], [Cirkel], [Constructie], [Afbeeldingen], [Macro], [Eigenschap], [Rekenen], [Extra] en [Layout]. De functies in zo'n menu geven we dan aan met [Menunaam]Functienaam; als voorbeeld: [Cirkel]Boog, waarmee wordt bedoeld dat in het *Cirkel*-menu de functie 'Boog' moet worden geselecteerd (gekozen).
- [5] Eigenlijk moeten we hier spreken van lijncoördinaten of abscissen.