Cabri-werkblad
Negenpuntscirkel

0. Vooraf

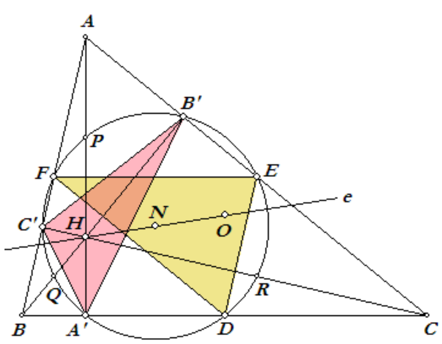
- Bij dit werkblad wordt kennis verondersteld van de eigenschappen van parallellogrammen, rechthoekige driehoeken en van de elementaire eigenschappen van de koordenvierhoek.
- Deelopdrachten voorafgegaan door 🗎 moeten op een uitwerkingenblad of via een verslag worden beantwoord.

1. Historie

In de 19e eeuw was een van de meest opmerkelijke ontdekkingen in de Euclidische (vlakke) meetkunde het feit dat er een cirkel is waarop *negen* bijzondere punten van een driehoek liggen.

In 1765 bewees *Leonhard Euler* (1707-1783, Zwitserland) dat de middens van de zijden van een driehoek en de voetpunten van de hoogtelijnen op dezelfde cirkel liggen. Of anders gezegd, de driehoek gevormd door de middens van de zijden en de driehoek gevormd door de voetpunten van de hoogtelijnen hebben dezelfde omcirkel (omgeschreven cirkel). Verder bleek dat het middelpunt van die cirkel gelegen was op de lijn (de **Euler-lijn**) door het hoogtepunt en het omcentrum (middelpunt van de omcirkel) van die driehoek (zie figuur 1).

Het was in 1820 dat *Charles-Julien Brianchon* (1783-1864, Frankrijk) en *Jean-Victor Poncelet* (1788-1867, Frankrijk) bewezen dat de middens van de lijnstukken die het hoogtepunt met de hoekpunten verbinden (de 'bovenste' hoogtelijnstukken), eveneens op die cirkel liggen.
Als gevolg van een en ander werd deze cirkel de **negenpuntscirkel** (soms ook wel **Euler-cirkel**) van de driehoek genoemd.

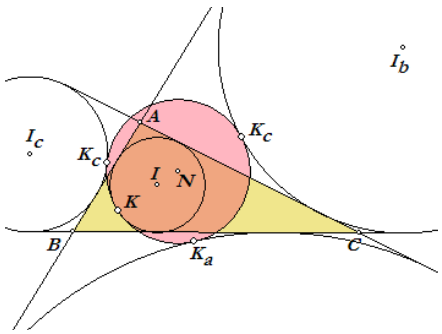


figuur 1

In de figuur hiernaast zien we:

- *D*, *E*, *F*: de middens van de zijden;
- *A'*, *B'*, *C'*: de voetpunten van de hoogtelijnen;
- *H*: het hoogtepunt van driehoek *ABC*;
- *O*: het omcentrum van driehoek *ABC*;
- *N*: het middelpunt van de negenpuntscirkel;
- *P*, *Q*, *R*: middens van de 'bovenste' hoogtelijnstukken;
- *e*: de Euler-lijn.

Iets later, in 1822, bewees *Karl Wilhelm Feuerbach* (1800-1834, Duitsland) dat de negenpuntscirkel raakt aan de ingeschreven cirkel (incirkel) en de drie aangeschreven cirkels (uitcirkels) van de betreffende driehoek. Hierdoor wordt ook Feuerbachs naam vaak met de negenpuntscirkel geassocieerd (**Feuerbach-cirkel**).
Een uitcirkel van een driehoek ligt geheel buiten de driehoek en raakt 'uitwendig' aan de drie zijden van de driehoek. Zie figuur 2.



figuur 2

In de figuur hiernaast zien we ondermeer:

- I: het middelpunt van de incirkel;
- I_b, I_c: middelpunten van uitcirkels;
- K: raakpunt met de incirkel;
- K_a, K_b, K_c: raakpunten met de uitcirkels.

We formuleren de zogenoemde *negenpuntsstelling*:

Negenpuntsstelling. *In een willekeurige driehoek liggen de middens van de zijden, de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de 'bovenste' hoogtelijnstukken op dezelfde cirkel.*

Opdracht 1

🖹 Teken op een nieuw Cabri-werkblad een driehoek ABC en construeer daarop ook de negen in de stelling genoemde punten. Beschrijf daarbij kort de gebruikte constructiestappen.
Aanwijzing. Zie figuur 1 voor de ligging en de naamgeving van deze punten.

- Teken ook de cirkel die gaat door de punten D, E, F (de middens van de zijden).

🖹 Ga vervolgens na dat de andere punten ook op deze cirkel liggen. Beschrijf kort hoe je dit hebt nagegaan.
Aanwijzing. Je kan gebruik maken van de Cabri-functie 'Afstand en lengte' in het Reken-menu (het 3e menu van rechts) of van de functie 'Ligt op punt op…? in het Eigenschappen-menu (4e menu van rechts).

Opdracht 2

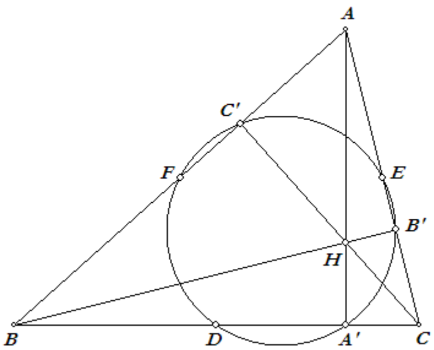
- Verplaats de punten A, B en C en bekijk daarbij de verschillende posities van de negenpuntscirkel. Mogelijk kom je hierbij tot de ontdekking dat er bijzondere punten verdwijnen (bijvoorbeeld als driehoek ABC stomphoekig wordt).
  Pas in dit geval de constructie van die punten aan!
  Aanwijzing. Wellicht moet je in dit geval de hoogtelijnen op een andere manier construeren.

🖹 Is het mogelijk een negenpuntscirkel te krijgen die geheel *binnen* driehoek ABC ligt? Wat voor soort driehoek is driehoek ABC in dit geval?

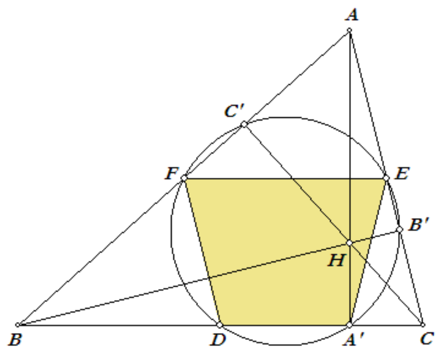
2. Op weg naar het bewijs

In het algemeen wordt een cirkel bepaald door drie punten. Een strategie om te komen tot een bewijs van de negenpuntsstelling is daarom te beginnen met een cirkel door drie van de geconstrueerde punten (van dezelfde 'soort') en dan vervolgens te bewijzen dat de andere punten op die cirkel liggen.

We zullen hieronder uitgaan van de cirkel $\mathcal{K}$ door de middens D, E, F van de zijden van driehoek ABC (die liggen dan in ieder geval reeds op de negenpuntscirkel).
We zullen eerst bewijzen dat de voetpunten van de hoogtelijnen (dat zijn dus de punten A', B', C') op $\mathcal{K}$ liggen.
Daarna tonen we aan dat de middens van de hoogtelijnstukken (de punten P, Q, R) eveneens op $\mathcal{K}$ liggen.



figuur 3a



figuur 3b

Opdracht 3

- Ga uit van de tekening die je bij Opdracht 1 hebt gebruikt. Bewaar deze figuur eerst op disk voordat je er wijzigingen in gaat aanbrengen!
- Verberg nu een aantal objecten en verplaats *A*, *B* en/of *C* nu zo, dat jouw figuur zo veel mogelijk lijkt op die in figuur 3a.
- Teken vervolgens met de functie 'Veelhoek' de vierhoek *EFDA'* (zie figuur 3b). Bewaar ook deze figuur op disk!

🖹 Waarom is *EF* evenwijdig met *BC* (en daarmee dus evenwijdig met *DA'*)?

- Bereken met de functie 'Hoek' de grootte van ∠ *DFE* en de grootte van ∠ *DA'E*. Hoe groot is de som van die hoeken?
  Bereken ook, met behulp van de functie 'Afstand en lengte', de lengtes van de lijnstukken *A'E* en *CE*.

🖹 Verplaats nu het punt *A*. Wat valt je op met betrekking tot de hierboven berekende som en de lengtes van *A'E* en *CE*?

We zullen in de volgende opdracht enkele zaken die je in Opdracht 3 hebt ontdekt, daadwerkelijk bewijzen.

Opdracht 4

🖹 Bewijs dat vierhoek *FDCE* een parallellogram is.
🖹 Kijk naar driehoek *AA'C*. Dit is een rechthoekige driehoek. Waarom is daarin *A'E* = *EC*?

🖹 Bewijs dat vierhoek *EFDA'* een *gelijkbenig trapezium* is (dat wil onder meer zeggen, dat *DF* = *A'E*).
🖹 Bewijs dat in een gelijkbenig trapezium de som van twee overstaande hoeken (altijd) gelijk is aan 180°.
🖹 Waarom is *EFDA'* een koordenvierhoek?
🖹 Welke conclusie kan je hieruit trekken omtrent de ligging van het punt *A'* en de cirkel $\mathcal{K}$?

Opdracht 5

Er zijn posities van het punt *A* (en daarmee van het punt *A'*) waarbij de bewijzen die in Opdracht 4 staan, niet op dezelfde manier kunnen worden geleverd. Kijk bijvoorbeeld eens, uitgaande van figuur 3b, wat er gebeurt als je het punt *A* naar links verplaatst (*A'* ligt dan op het lijnstuk *BD*).

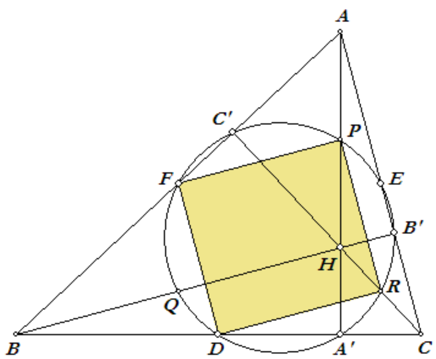
🖹 Kies een dergelijke positie en verander de bewijzen zo, dat ook in die gevallen voor het punt *A'* kan worden bewezen dat het op de cirkel $\mathcal{K}$ ligt. Maak een afdruk van de gebruikte tekening en plaats deze in je verslag (of lever de afdruk in samen met je uitwerkingenblad).

Opdracht 6

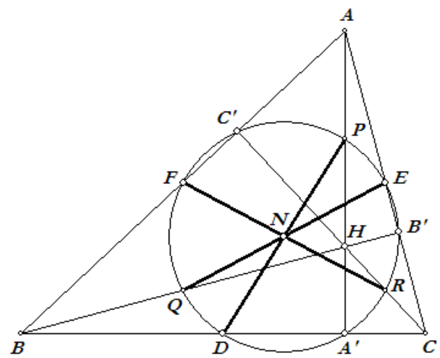
- Welk gelijkbenig trapezium en welke rechthoekige driehoek moet je gebruiken om te bewijzen dat het punt B' op de cirkel $\mathcal{K}$ ligt?
- En welke zijn dat voor het bewijs dat het punt C' op $\mathcal{K}$ ligt?

3. De rest van het bewijs

We hebben nu in principe bewezen dat de bijzondere punten D, E, F, A', B', C' alle op $\mathcal{K}$ liggen.
Nu moet nog worden aangetoond dat dat ook het geval is met de punten P, Q en R. We bekijken daartoe eerst figuur 4.



figuur 4



figuur 5

Opdracht 7

In figuur 4 is de vierhoek $PFDR$ een rechthoek. Dit kan je bewijzen door te laten zien dat:

- $PFDR$ een parallellogram is.
  Aanwijzing. Toon daartoe aan dat $FP \parallel BB'$, dat $DR \parallel BB'$ en dat $FP = DR$.
- En dat (bijvoorbeeld) FP loodrecht staat op PR.

- Geef de hierboven bedoelde bewijzen.
- Waarom ligt het punt F op de cirkel met middellijn PD?
- Bewijs dat ook het punt A' ligt op de cirkel met middellijn PD.

- Er is precies één cirkel die gaat door de punten F, D en A'.
  Welke reeds gevonden cirkel is dat? Waarom ligt het punt P ook op deze cirkel?

Opdracht 8

- Welke rechthoek kan je gebruiken om te bewijzen dat ook het punt Q op de cirkel $\mathcal{K}$ ligt?
  En welke rechthoek gebruik je voor het punt R?

Hiermee is de negenpuntsstelling bewezen: alle negen bijzondere punten van driehoek ABC liggen op de cirkel $\mathcal{K}$.

4. Tot slot

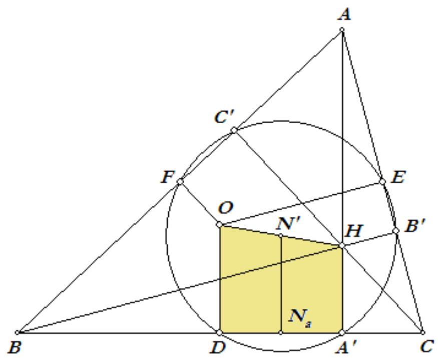
Opdracht 9

In figuur 5 zijn de lijnstukken PD, QE en RF getekend. Deze lijnstukken delen elkaar in het punt N (twee aan twee) midden door.

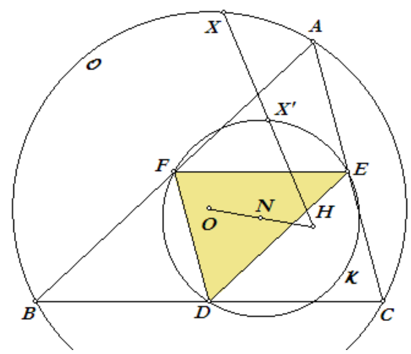
- Bewijs dat.
  Aanwijzing. Kijk nog eens naar Opdrachten 7 en 8 (rechthoeken!).

- Waarom is het punt N het middelpunt van de negenpuntscirkel $\mathcal{K}$ van driehoek ABC?

Een bijzondere eigenschap van het punt N is, dat het gelegen is midden tussen het omcentrum O en het hoogtepunt H van driehoek ABC: N is het midden van het lijnstuk OH.
Een bewijs daarvan is niet zo gemakkelijk uit de hierboven staande opdrachten te halen. Het punt O kwam daarin immers niet voor.



figuur 6



figuur 7

Opdracht 10

In figuur 6 zijn in de punten D, E, F loodlijnen getekend op opvolgend de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC.

🗎 Waarom snijden die lijnen elkaar in het punt O ?

🗎 Waarom is de vierhoek $HODA'$ een rechthoekig trapezium?

Ook is de middelloodlijn van het lijnstuk $A'D$ (in N_a loodrecht op BC) getekend. Deze middelloodlijn snijdt het lijnstuk OH in het punt N' (N-accent; en dat is *voorlopig nog niet* het punt N).

🗎 Bewijs dat N' het midden is van OH.
Waarom is nu $N'A' = N'D$?

🗎 Welke andere rechthoekige trapezia kan je gebruiken om te bewijzen dat $N'B' = N'E$ en dat $N'C' = N'F$?

🗎 Waarom valt het punt N' samen met het middelpunt N van de negenpuntscirkel $\mathcal{K}$?
Aanwijzing. Wat weet je van de middelloodlijn van een koorde van een cirkel ?

Opdracht 11 (Toegift)

In figuur 7 zijn de cirkel $\mathcal{K}$, de negenpuntscirkel, en de omcirkel $\mathcal{O}$ van driehoek ABC getekend.

🗎 Bewijs dat de straal van $\mathcal{K}$ de helft is van de straal van $\mathcal{O}$.
Aanwijzing. Wat weet je van de lengtes van de zijden van driehoek DEF en van die van driehoek ABC ?

Als je een willekeurig punt X van $\mathcal{O}$ verbindt met H, dan ligt het midden X' van het lijnstuk HX op $\mathcal{K}$.

🗎 Bewijs dat.

