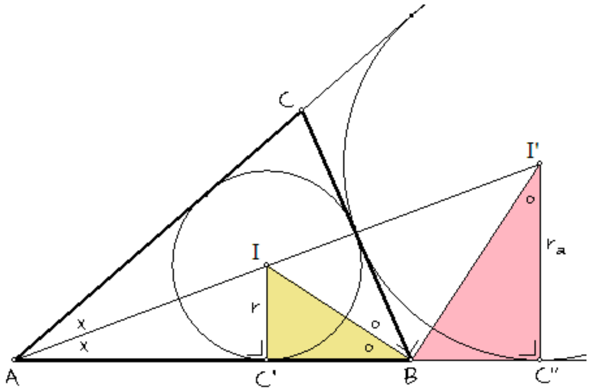
Meetkunde, met wat inductie

Dick Klingens (e-mailadres: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel (NL)
augustus 2009

Formule van Heron

We zullen in hetgeen volgt gebruikmaken van een in het huidige meetkundeonderwijs niet zo bekende formule, namelijk die van Heron. Daarom eerst een afleiding van die formule, hier gebaseerd op gelijkvormigheid.

figuur 1



In figuur 1 zijn I en I' opvolgend het middelpunt van de incirkel (straal r) en het middelpunt van de uitcirkel bij de zijde BC (straal r_a) van driehoek ABC. De punten C' en C'' zijn de projecties van I en I' op de lijn AB.

Nu is, wegens $IC' \,//\, I'C''$: $\quad IC' : I'C'' = AC' : AC''$

Zoals bekend[1] is $AC' = s - a$ en $AC'' = s$, waarbij s gelijk is aan de halve omtrek (*semiperimeter*) van driehoek ABC. Zodat:

(1)… $\quad r : r_a = (s - a) : s$

Verder zijn de driehoeken $BC'I$ en $I'C''B$ gelijkvormig (*hh*). En dat geeft:

$$BC' : I'C'' = C'I : C''B$$

of, met $BC' = s - b$ en $BC'' = s - c$:

(2)… $\quad (s - b) : r_a = r : (s - c)$

Eliminatie van r_a uit (1) en (2) geeft (via deling):

$$\frac{r}{s-b} = \frac{\frac{s-a}{s}}{\frac{r}{s-c}} = \frac{(s-a)(s-c)}{rs} \quad \Rightarrow \quad r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c)$$

Of: $\quad r^2 s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

Is F de oppervlakte van driehoek ABC, dan vinden we met $F = rs$ (zie hiertoe, zo nodig, het tweede gedeelte van noot [2]):

$$F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Deze laatste formule staat bekend als de *formule van Heron* (naar Heron van Alexandrië, ±10 - ±75, Egypte).[2]

In- en uitcirkels

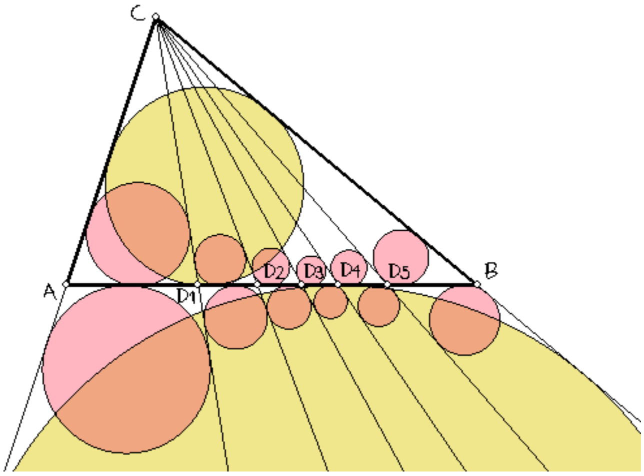
De in de vorige paragraaf afgeleide formule zullen we gebruiken bij het bewijs van de volgende stelling.

Stelling 1. *Liggen op de zijde AB van driehoek ABC de* $(n-1)$ *deelpunten* D_1, D_2, $D_3,\ldots, D_{n-1}$, *dan geldt voor de incirkels (straal* r_k*) en de bij C behorende uitcirkels (straal* d_k*) van het n-tal deeldriehoeken* AD_1C, D_1D_2C, D_2D_3C, …, $D_{n-1}BC$:

$$\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}\cdots\frac{r_n}{d_n}=\frac{r}{d}$$

waarbij r en d opvolgend de stralen zijn van de incirkel en van de bij C behorende uitcirkel van driehoek ABC.

figuur 2



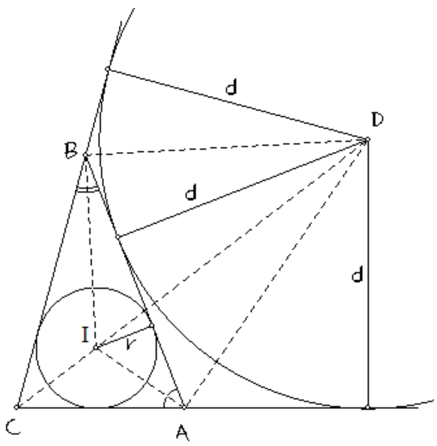
De vraag die nu wellicht bij de lezer opkomt, is: 'Waarom hebben we de formule van Heron nodig om de stelling te bewijzen?'
Het antwoord: 'De oppervlakte F van een driehoek is (een te elimineren) "intermediair" tussen de straal van de incirkel en de straal van een uitcirkel van die driehoek.'
Immers, we hebben reeds gezien dat $F = rs$, en verder is ***in figuur 3*** (waarin D het middelpunt is van de uitcirkel bij AB)[3]:

$$F = F(DAC) + F(DBC) - F(DAB)$$

zodat: $$F=\tfrac{1}{2}bd+\tfrac{1}{2}ad-\tfrac{1}{2}cd=d(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}c)=d(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c-c)$$

of: $$F=d(s-c)$$

figuur 3



We vinden dan door gelijkstelling dat $rs = d(s-c)$, waaruit volgt:

(3)… $$\frac{r}{d}=\frac{s-c}{s}$$

In driehoek IAB is verder: $\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$, $\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b}$

En dan is, gebruikmakend van de formule van Heron en opnieuw van $F = rs$:

$$\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tan\tfrac{B}{2}=\frac{r^2}{(s-a)(s-b)}=\frac{r^2\cdot s^2\cdot(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{F^2\cdot(s-c)}{F^2}\cdot\frac{1}{s}$$

En dit geeft:

(4)… $$\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tan\tfrac{B}{2}=\tfrac{s-c}{s}$$

Zodat uit (3) en (4) volgt:

(5)… $$\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tan\tfrac{B}{2}=\tfrac{r}{d}$$

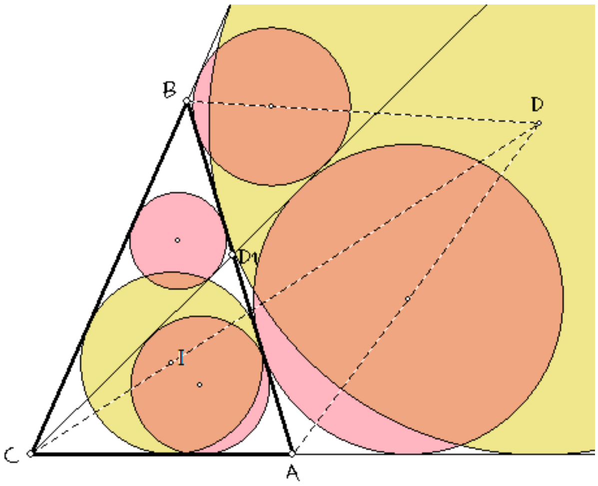
En eigenlijk gaat het om deze laatste formule!

Als *n* = 2 …

We bekijken eerst het geval voor $n = 2$; dat wil zeggen dat we via het enige deelpunt D_1 op AB moeten aantonen dat voor de beide deeldriehoeken AD_1C en D_1BC van driehoek ABC geldt (***zie figuur 4***):

$$\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}=\frac{r}{d}$$

figuur 4



Analoog aan formule (5) is nu in driehoek AD_1C met $\angle AD_1C = q_1$:

(6)… $$\frac{r_1}{d_1}=\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tan\tfrac{q_1}{2}$$

en in driehoek D_1BC, eveneens analoog aan (5):

(7)… $$\frac{r_2}{d_2}=\tan\tfrac{B}{2}\cdot\tan\tfrac{180^\circ-q_1}{2}=\tan\tfrac{B}{2}\cdot\tan(90^\circ-\tfrac{q_1}{2})=\tan\tfrac{B}{2}\cdot\cot\tfrac{q_1}{2}$$

Na vermenigvuldiging van (6) en (7), en met gebruik van (5) zelf, is dan:

(8)… $$\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}=\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tan\tfrac{B}{2}=\frac{r}{d}$$

Inductie (1)

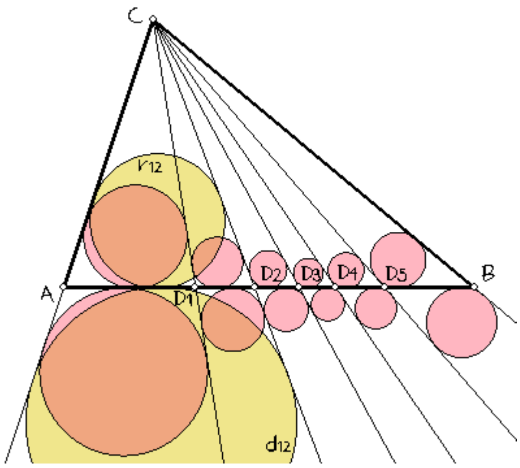
We kunnen nu Stelling 1 met *volledige inductie* bewijzen. Zoals bekend verloopt een dergelijk bewijs (meestal) in drie stappen. De eerste daarvan hebben we reeds in de vorige paragraaf gezet:

Stap 1. De eigenschap geldt voor $n = 2$ (voor $n = 1$ is de stelling triviaal).

Stap 2. We gaan er nu van uit dat de stelling geldt voor een verdeling van driehoek ABC in n driehoeken (*inductieveronderstelling*). Er geldt dus voor ***elk*** n-tal ('aansluitend' gelegen) deeldriehoeken, bepaald door $(n-1)$ deelpunten D_k op de zijde AB:

$$\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}\cdots\frac{r_n}{d_n}=\frac{r}{d}$$

figuur 5



Van driehoek AD_2C stellen we de grootte van de straal van de incirkel gelijk aan r_{12} en die van de bij C behorende uitcirkel gelijk aan d_{12} (*zie figuur 5*).
Volgens stap 1 is dan, met de twee deeldriehoeken AD_1C en D_1D_2C van driehoek AD_2C:

(9)… $$\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}=\frac{r_{12}}{d_{12}}$$

Stap 3. We bekijken dan het n-tal deeldriehoeken AD_2C, D_2D_3C, …, $D_{n-1}D_nC$, D_nBC die gevormd worden door de $(n-1)$ deelpunten D_2, D_3, …, D_{n-1}, D_n (dit laatste deelpunt is toegevoegd op het lijnstuk $D_{n-1}B$).
Op basis van de inductieveronderstelling (stap 2) is dan (de lengtes van de stralen van driehoek D_nBC zijn r_{n+1} en d_{n+1}):

$$\left(\frac{r_{12}}{d_{12}}\right)\cdot\frac{r_3}{d_3}\cdots\frac{r_n}{d_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{d_{n+1}}=\frac{r}{d}$$

Samen met (9) geeft dit: $$\left(\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}\right)\cdot\frac{r_3}{d_3}\cdots\frac{r_n}{d_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{d_{n+1}}=\frac{r}{d}$$

Waarmee Stelling 1 volgens het principe van volledige inductie is bewezen: de in de stelling genoemde eigenschap geldt nu immers ook voor $(n + 1)$ driehoeken. ♦

En de omcirkels erbij

Ook als we de omcirkels van de beschouwde (deel)driehoeken erbij betrekken, kunnen we een relatie tussen de groottes van de stralen vinden. Er geldt dan:

Stelling 2. *Zijn R_k de lengtes van de stralen van omcirkels van de n driehoeken AD_1C, D_1D_2C, D_2D_3C, …, $D_{n-1}BC$ en is R die van de omcirkel van driehoek ABC, dan is*:

$$\frac{r_1+d_1}{R_1}+\frac{r_2+d_2}{R_2}+\ldots+\frac{r_n+d_n}{R_n}=\frac{r+d}{R}$$

waarbij d_k , r_k , r en d dezelfde betekenis hebben als in Stelling 1.

Op de weg naar het bewijs van deze stelling kijken we eerst naar de uitdrukking $\frac{r+d}{2R}$ in driehoek ABC zelf. Nu is:

$$\frac{r+d}{2R}=\frac{\frac{F}{s}+\frac{F}{s-c}}{\frac{abc}{2F}}=\frac{4F^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-c}\right)}{2abc}$$

immers, voor F geldt ook (zie eventueel noot [4]):

$$F=\frac{abc}{4R}$$

En dan is:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s-c}=\frac{2s-c}{s(s-c)}=\frac{(a+b)(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{\frac{1}{4}(a+b)(b+c-a)(a+c-b)}{F^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}(a+b)(c^2-(a-b)^2)}{F^2}$$

Zodat:

(*)...
$$\frac{r+d}{2R}=\frac{(a+b)(c^2-(a-b)^2)}{2abc}=\frac{c^2-(a-b)^2}{2bc}+\frac{c^2-(a-b)^2}{2ac}$$
$$=\frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{2bc}+\frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{2ac}$$

We voegen nu in de tellers van de breuken in het rechter lid respectievelijk de term $+2b^2$ en $+2a^2$ toe, met uiteraard telkens een correctie. Dan is, na enig herschrijven:

$$\frac{r+d}{2R}=\frac{c^2-a^2+b^2}{2bc}+\left(\frac{2ab}{2bc}-\frac{2b^2}{2bc}\right)+\frac{c^2-b^2+a^2}{2ac}+\left(\frac{2ab}{2ac}-\frac{2a^2}{2ac}\right)$$

en daarbij geldt voor de termen tussen de haakjes:

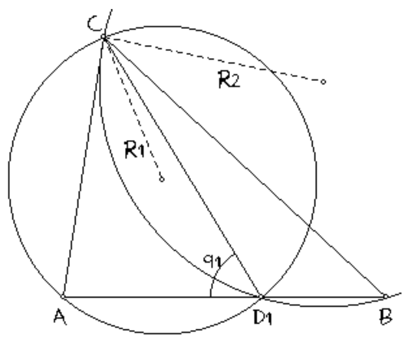
$$\frac{2ab}{2bc}-\frac{2b^2}{2bc}+\frac{2ab}{2ac}-\frac{2a^2}{2ac}=\frac{2a^2b-2ab^2+2ab^2-2a^2b}{2abc}=0$$

zodat via de *cosinusregel* in driehoek ABC blijkt dat:

(10)...
$$\frac{r+d}{2R}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\cos A+\cos B$$

Opmerking. De hierboven staande uitwerking (via het toevoegen van termen) is wellicht wat gezocht. Zie noot [5] voor een andere afleiding van relatie (10), uitgaande van het eerste deel van de relatie (*).

figuur 6



Vervolgens bekijken we de verdeling van driehoek ABC bij één deelpunt D_1 op de zijde AB, waarbij $\angle AD_1C = q_1$. Dan is ***in figuur 6***, met tweemaal gebruik van relatie (10):

(11a)...
$$\frac{r_1+d_1}{2R_1}+\frac{r_2+d_2}{2R_2}=(\cos A+\cos q_1)+\cos(180°-q_1)+\cos B$$
$$=\cos A+\cos q_1-\cos q_1+\cos B$$

Dus:

(11b)...
$$\frac{r_1+d_1}{2R_1}+\frac{r_2+d_2}{2R_2}=\cos A+\cos B\overset{-\text{ zie }(10)-}{=}\frac{r+d}{2R}$$

De beschouwde som is daarmee *onafhankelijk* van de ligging van het punt D_1 op AB.

Tot slot. Voor de (n – 1) deelpunten D_k op het lijnstuk AB, en dus voor de n deeldriehoeken, hebben we dan:

$$(12)\ldots\qquad \frac{r_1+d_1}{2R_1}+\frac{r_2+d_2}{2R_2}+\ldots+\frac{r_n+d_n}{2R_n}=\cos A+\cos B=\frac{r+d}{2R}$$

Immers, de cosinussen van de beide hoeken bij elk van de deelpunten D_k vallen, zoals in relatie (11a), steeds tegen elkaar weg.
Uit (12) volgt dan eenvoudig:

$$\frac{r_1+d_1}{R_1}+\frac{r_2+d_2}{R_2}+\ldots+\frac{r_n+d_n}{R_n}=\frac{r+d}{R}$$

Waarmee Stelling 2 bewezen is. ♦

Inductie (2)

Ook Stelling 2 kan natuurlijk met *volledige inductie* worden bewezen.

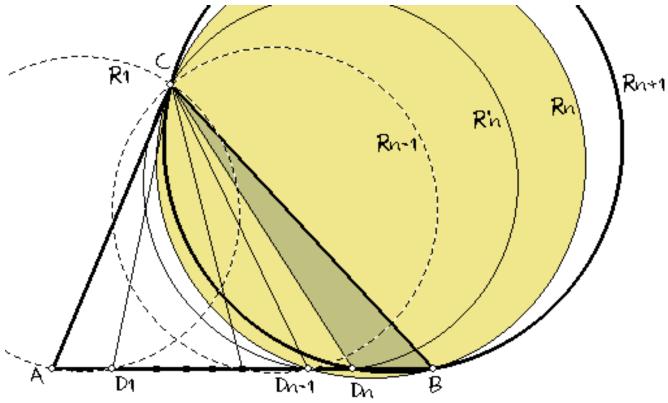
Stap 1. Voor $n = 2$ is de eigenschap juist. Dit is in de voorgaande paragraaf bewezen; zie daartoe ***figuur 6*** en relatie (11b).

Stap 2 (*inductieveronderstelling*). Voor het n-tal in driehoek ABC ('aansluitend' gelegen) deeldriehoeken AD_1C, …, $D_{n-1}BC$ is de stelling juist; dus geldt:

$$(13)\ldots\qquad \frac{r_1+d_1}{R_1}+\ldots+\frac{r_{n-1}+d_{n-1}}{R_{n-1}}+\left(\frac{r_n+d_n}{R_n}\right)=\frac{r+d}{R}$$

Stap 3. Op het lijnstuk $D_{n-1}B$ kiezen we nu het punt D_n, waardoor er $(n + 1)$ deeldriehoeken van driehoek ABC ontstaan.
Van de twee (nieuwe) deeldriehoeken $D_{n-1}D_nC$ en D_nBC van driehoek $D_{n-1}BC$ zijn de stralen opvolgend r'_n, d'_n, R'_n en r_{n+1}, d_{n+1}, R_{n+1}; ***zie figuur 7***.

figuur 7



Op grond van stap 1 – er zijn 2 deeldriehoeken in driehoek $D_{n-1}BC$ – is dan:

$$(14)\ldots\qquad \frac{r_n+d_n}{R_n}=\frac{r'_n+d'_n}{R'_n}+\frac{r_{n+1}+d_{n+1}}{R_{n+1}}$$

Uit (13) en (14) volgt dan:

$$\frac{r_1+d_1}{R_1}+\ldots+\frac{r_{n-1}+d_{n-1}}{R_{n-1}}+\left(\frac{r'_n+d'_n}{R'_n}+\frac{r_{n+1}+d_{n+1}}{R_{n+1}}\right)=\frac{r+d}{R}$$

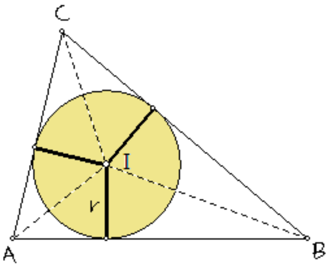
De in Stelling 2 genoemde eigenschap geldt dus ook voor de $(n + 1)$ deeldriehoeken van driehoek ABC. En daarmee is Stelling 2 bewezen volgens het principe van volledige inductie. ♦

Noten

[1] Voor de afleiding van deze formules zie bijvoorbeeld (op de website van de auteur):
- Dick Klingens (2002): *Incirkel*. Op: *www.pandd.demon.nl/lemoine/incirkel.htm*;
- Dick Klingens (2002): *Uitcirkels*. Op: *www.pandd.demon.nl/lemoine/uitcirkels.htm*

[2] Voor enkele andere bewijzen van de formule van Heron (en wat meer informatie) zie, eveneens op de website van de auteur:
- Dick Klingens (2000): *De formule van Heron*. Op: *www.pandd.demon.nl/heron.htm*

Op deze webpagina staat ook het bewijs van de formule $F = rs$. We geven dat bewijs hieronder kort weer.



In nevenstaande figuur is [3]:

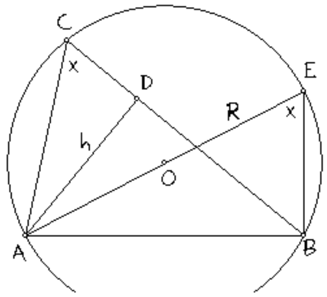
$$F = F(BCI) + F(CAI) + F(ABI)$$

Dus:

$$F = \tfrac{1}{2}ra + \tfrac{1}{2}rb + \tfrac{1}{2}rc = r(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c)$$
$$= rs$$

[3] We gebruiken in hetgeen volgt de notatie $F(X)$ voor de functie die aan de gesloten figuur X de oppervlakte ervan toevoegt (*oppervlaktefunctie*).
Gevolg: $F = F(ABC)$.

[4]



Van driehoek ABC is AE een middellijn van de omcirkel (middelpunt O). Het punt D is het voetpunt van de hoogtelijn h uit A op BC.
De rechthoekige driehoeken ADC en ABE zijn gelijkvormig (*hh*; de hoeken C en E staan immers beide op bg(AB), zodat: $AD : AB = AC : AE$

Of: $h : c = b : 2R$
Dus: $bc = 2R \cdot h$
Vermenigvuldiging van deze relatie met a geeft dan:

$$abc = 2R \cdot ah = 2R \cdot 2F$$

En dit resulteert in: $$F = \frac{abc}{4R}$$

[5] We hebben, uitgaande van de relatie (*):

$$\frac{r+d}{2R} = \frac{(a+b)(c^2-(a-b)^2)}{2abc} = \frac{(a+b)(c^2-a^2-b^2+2ab)}{2abc}$$

Volgens de *sinus-* én *cosinusregel* in driehoek ABC is dan:

$$\frac{r+d}{2R} = \frac{(2R\sin A + 2R\sin B)(-2ab\cos C + 2ab)}{2ab \cdot 2R\sin C} = \frac{(\sin A + \sin B)(1-\cos C)}{\sin C}$$

Zodat:

$$\frac{r+d}{2R} = \frac{(\sin A + \sin B)\cdot 2\sin^2 \tfrac{1}{2}C}{2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\tfrac{1}{2}C}\cdot\sin\tfrac{1}{2}C$$

Verder is: $\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{180°-C}{2} = \sin(90° - \frac{1}{2}C) = \cos\frac{1}{2}C$

en analoog: $\sin\frac{1}{2}C = \cos\frac{A+B}{2}$

Zodat: $\dfrac{r+d}{2R} = 2\cos\frac{A-B}{2} \cdot \cos\frac{A+B}{2}$

En dan is, volgens één van de goniometrische *optellingsformules*:

$$\frac{r+d}{2R} = \cos A + \cos B$$