De stelling van Feuerbach, een bewijs met inversie

1. Inleiding

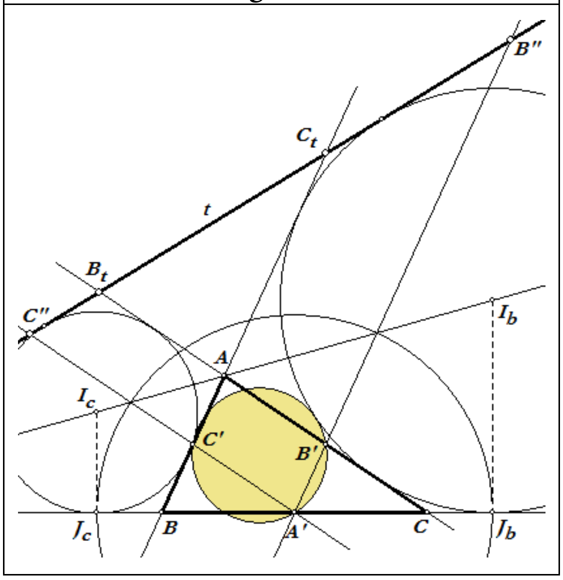
We willen bewijzen:

Stelling van Feuerbach. *De incirkel en de uitcirkels van een driehoek raken aan de negenpuntscirkel van die driehoek.*

Deze raakeigenschap is in 1822 als eerste door Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834, Duitsland) in zijn proefschrift beschreven en bewezen (zie [1]).
Een elementair bewijs van de stelling is niet eenvoudig te vinden. We zullen hieronder een, naar mijn idee, toch niet al te moeilijk bewijs geven op basis van *cirkelinversie* (zie voor de theorie der inversie bijvoorbeeld [2]); voor een bewijs voor het raken van de incirkel en de negenpuntscirkel, gebaseerd op elementaire meetkundige eigenschappen, verwijzen we naar [3].

2. Raking aan twee uitcirkels

figuur 1



Zie **figuur 1**. De punten A', B', C' zijn de middens van de zijden van driehoek ABC. De uitcirkels aan AB en AC, met opvolgend als middelpunt I_c en I_b zijn eveneens getekend.
De zijden van de driehoek zijn drie van de vier gemeenschappelijke raaklijnen aan deze cirkels.
De vierde gemeenschappelijke raaklijn, de lijn t, snijdt AB en AC in opvolgend C_t en B_t.
Omdat de lijn I_bI_c symmetrie-as is van de gemeenschappelijke raaklijnen, hebben we, met B'' als snijpunt van $A'B'$ en t en C'' als snijpunt van $A'C'$ en t:

$$AB_t = AB = c,\ \ AC_t = AC = b$$

Nu is $AC_t \,//\, B'B''$, zodat in de driehoeken B_tAC_t en $B_tB'B''$ geldt:

$$\frac{B'B''}{AC_t} = \frac{B_tB'}{B_tA} \tag{1}$$

We bekijken vervolgens de cirkel met middelpunt A' die gaat door de voetpunten J_b, J_c van de loodlijnen uit I_b en I_c op BC. Het punt A' is eveneens het midden van het lijnstuk J_bJ_c.
De straal r_i van deze cirkel is gelijk aan:

$$r_i = A'B + BJ_c = \tfrac{1}{2}a + (s-a) = \tfrac{1}{2}a + (\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}a) = \tfrac{1}{2}(b+c) \qquad (2)$$

Dan volgt uit (1):

$$B'B'' = \frac{AC_t \cdot B_tB'}{B_tA} = \frac{b \cdot (\frac{1}{2}b + c)}{c} = \frac{b^2 + 2bc}{2c}$$

Zodat we voor $A'B''$ vinden:

$$A'B'' = A'B' + B'B'' = \tfrac{1}{2}c + \frac{b^2+2bc}{2c} = \frac{(b+c)^2}{2c}$$

Dan is vervolgens:

$$A'B' \cdot A'B'' = \tfrac{1}{2}c \cdot \frac{(b+c)^2}{2c} = \tfrac{1}{4}(b+c)^2 \overset{\text{zie (2)}}{=} (r_i)^2$$

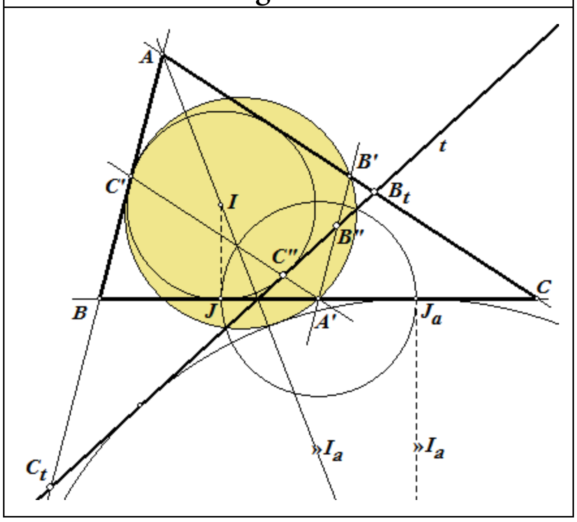
Met andere woorden: de punten B' en B'' zijn toegevoegde punten bij de cirkelinversie met centrum A' en met r_i als inversiestraal.
En evenzo geldt dat voor de punten C' en C''.
Omdat de lijn $B''C''$ raakt aan de beide uitcirkels, die invariant zijn (op zichzelf worden afgebeeld) bij de bedoelde inversie, zal ook het beeld van $B''C''$ – en dat is in dit geval een cirkel – raken aan die uitcirkels. Omdat A' het centrum is van de inversie, gaat die cirkel ook door A', en uiteraard ook door de (via de inversie verkregen) toegevoegde punten B' en C' van de punten B'' en C''.
Het beeld van de lijn $B''C''$ is dus de negenpuntscirkel van driehoek ABC. Uit de inversie-eigenschappen volgt dan dat die negenpuntscirkel raakt aan de beide uitcirkels, namelijk aan die aan AB en die aan AC. Analoog kunnen we bewijzen dat de negenpuntscirkel ook raakt aan de uitcirkel aan BC.

Waarmee we dan hebben: *de negenpuntscirkel van een driehoek raakt aan de uitcirkels van die driehoek.* (3)

3. Raking aan de incirkel

Om te bewijzen dat de negenpuntscirkel van een driehoek ook aan de incirkel daarvan raakt kunnen we op ongeveer dezelfde manier te werk gaan.

figuur 2



In **figuur 2** is de lijn t nu de vierde (en dit keer inwendige) raaklijn aan de incirkel (middelpunt I) en de uitcirkel aan BC (middelpunt I_a), en zijn de punten A', B', C' de middens van de zijden.
De punten B'', C'' en B_t, C_t zijn op dezelfde manier gevonden als in paragraaf 2.

Het bewijs dat de inversie met centrum A' en inversiestraal $r_i = A'J$ de lijn t doet overgaan in (afbeeldt op) de negenpuntscirkel van driehoek ABC verloopt op dezelfde manier als we in paragraaf 1 hebben gezien.

Zodat: *de negenpuntscirkel raakt ook aan de incirkel van de driehoek*. (4)

4. Conclusie

De resultaten (3) en (4) van de paragrafen 2 en 3 geven samen het bewijs van de stelling van Feuerbach.

Noten e.d.

[1] K.W. Feuerbach: *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Driecks*. Haarlem: P. Visser Azn. (1908, zweite nichtgeänderte Ausgabe; in opdracht van het Wiskundig Tijdschrift); pp. 38-45.

De negenpuntscirkel zelf werd in 1821 door Brianchon en Poncelet als eersten behandeld (zie daarvoor [4]). In 1804 publiceerde de Engelse ingenieur Benjamin Bevan evenwel een probleem in *Mathematical Repository* Vol. 1 (Part I, p. 143) waarvan de oplossing equivalent is met de negenpuntscirkel.

[2] Dick Klingens: *Inversie*. URL: « *http://www.pandd.demon.nl/inversie.htm* ».
De stelling van Feuerbach is op een iets andere manier, maar ook met inversie, bewezen op « *http://www.pandd.demon.nl/feuerinv.htm* ».

[3] Dick Klingens: *Over de cirkel van Feuerbach en de lijn van Euler*. URL: « *http://www.pandd.demon.nl/feuerbach.htm* ».

[4] C.J. Brianchon, J.V. Poncelet: *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données*. In: Annales de Gergonne (Annales de Mathématiques), Tome 11, pp. 205-220 (1821).
Dit artikel is als PDF-bestand te downloaden via « *http://archive.numdam.org/article/AMPA_1820-1821__11__205_0.pdf* ».

