Over een eigenschap van het punt van Fermat

[Dick Klingens]

Afspraak

Fsom = *FA* + *FB* + *FC*, waarbij *F* het Fermat-punt is van driehoek *ABC*.

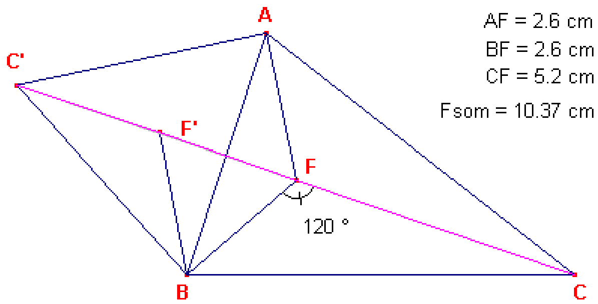
Te bewijzen:

$Fsom^2 = ½\, a^2 + ½\, b^2 + ½\, c^2 + 2\sqrt{3} \cdot O$

waarin *O* de oppervlakte is van driehoek *ABC*.

Bewijs:

We gaan bij het bewijs uit van de onderstaande figuur:



(zie http://www.pandd.demon.nl/werkbladen/fermatnapo.htm)

Allereerst wat te gebruiken eigenschappen (die je zelf maar moet bewijzen of opzoeken op de Formulekaart)

(1) $\cos(p+q) = \cos p \cos q - \sin p \sin q$

(2) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R = \dfrac{abc}{2O}$ (dit is de sinusregel, met gevolg)

(3) $-\cos B = \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}$ (dit volgt direct uit de cosinusregel)

Bewezen is (zie weer http://www.pandd.demon.nl/werkbladen/fermatnapo.htm) dat

$CC' = FA + FB + FC = Fsom.$

We bekijken nu driehoek *BCC'* en passen daarin de cosinusregel toe op *CC'*.

Dan geldt:

$$CC'^2 = BC^2 + BC'^2 - 2BC \cdot BC' \cdot \cos(B + 60^\circ)$$

of, met de gebruikelijke aanduiding voor de zijden van driehoek *ABC*:

$$Fsom^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^\circ)$$

Volgens (1) hebben we dan:

$$\begin{aligned}\cos(B + 60^\circ) &= \cos B \cos 60^\circ - \sin B \sin 60^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}\cos B - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin B\end{aligned}$$

Uit deze laatste uitdrukking vinden we dan, met gebruikmaking van (2) voor cos *B* en (3) voor sin *B*, en enig rekenwerk (wat ik graag aan de lezer overlaat):

$Fsom^2 = ½\, a^2 + ½\, b^2 + ½\, c^2 + 2\sqrt{3} \cdot O$

Hetgeen bewezen moest worden.

Opmerking

Het **punt van Fermat** wordt vaak ook aangeduid als het **punt van Fermat-Toricelli**.