Cabri - vraag

Vraag

Hoe teken je een kegelsnede waarvan een punt P, een brandpunt F en de bij F behorende richtlijn r gegeven zijn?

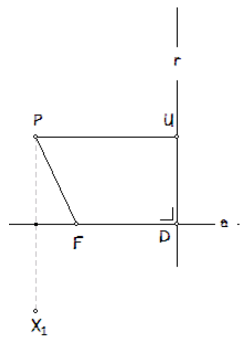
Antwoord

Zoals bekend kan je met Cabri een kegelsnede tekenen (we spreken hier *niet* van construeren) als daarvan 5 verschillende punten op het tekenblad staan (met de functie **Kegelsnede** in het *Cirkel-menu*).

Wel, we hebben in ieder geval al één punt. De andere vier zullen we door middel van constructie moeten zien te vinden.
Het punt P bepaalt samen met F en r de *excentriciteit* e van de kegelsnede [1]:

$$e = \frac{PF}{d(P,r)}$$

waarin d de afstandsfunctie is van twee meetkundige objecten. ***In figuur 1*** is $PU = d(P, r)$.



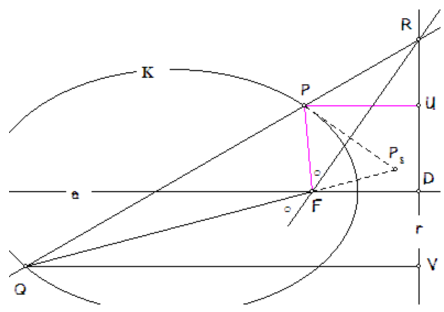
figuur 1

Ook de (hoofd)as a van de kegelsnede zal een rol spelen bij de constructie. a is de lijn door F loodrecht op r, met $D = a$ & r. Die as is een symmetrie-as van de kegelsnede.
En daarmee hebben we dan het *eerste* van de vier nog te construeren punten gevonden (***zie figuur 1***):

X_1 = (spiegelbeeld van P in a)

De (impliciet gegeven) excentriciteit van de kegelsnede maakt het mogelijk de volgende eigenschap ervan te gebruiken.

Stelling. *Is PQ een koorde* [2] *van een kegelsnede* $\mathcal{K}$ *waarvan een brandpunt F en de bij F behorende richtlijn r gegeven zijn, dan maakt de lijn RF, met R = r & PQ, gelijke hoeken met de voerstralen* [2] *PF en QF.*



figuur2

Bewijs. ***Zie figuur 2.*** Zijn U en V de projecties van P en Q op r, dan geldt:

$$\frac{PU}{QV} = \frac{PR}{QR}$$ (in driehoek RQV met $PU // QV$)

en ook (*per definitie*):

$$\frac{PF}{PU} = \frac{QF}{QV} = e \text{, zodat: } \frac{PU}{QV} = \frac{PF}{QF}$$

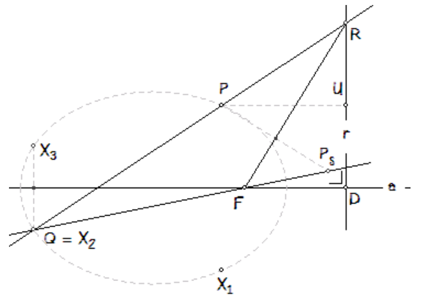
En dus is: $\frac{PR}{QR} = \frac{PF}{QF}$

Volgens de (omgekeerde) *bissectricestelling* [3] in driehoek PQF is dan RF een bissectrice van de hoek F (***in figuur 2*** is RF de *buiten*bissectrice van hoek F).
De lijn RF maakt inderdaad gelijke hoeken met PF en QF. ◊

Gevolg. Het spiegelbeeld P_s van het punt P in de lijn RF ligt op de lijn QF. ◊

En van dit laatste maken we gebruik bij de constructie van twee van de andere gezochte punten!

Als 'willekeurig' punt R op de lijn r kiezen we het spiegelbeeld van het punt D in het punt U.



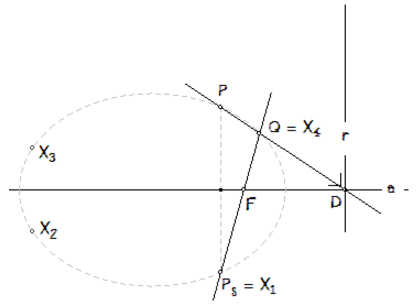
figuur 3

En dan gaan we op zoek naar het tweede snijpunt Q van de lijn RP met de kegelsnede; ***zie figuur 3***.
Het punt P_s is dan het spiegelbeeld van P in het lijnstuk RF.
Zodat we het *tweede* van de nog te construeren punten van de kegelsnede vinden als:

$Q = P_sF$ & $RP \equiv X_2$

En X_3 = (spiegelbeeld X_2 in a) is dan het *derde* te construeren punt van de kegelsnede.

En nu is er nog één punt te gaan…

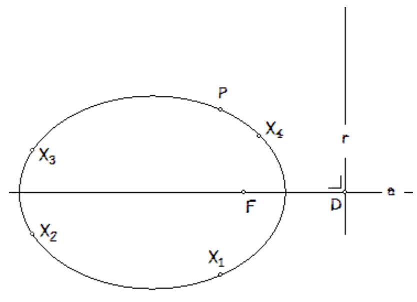


figuur 4

Ook het punt D kan, als punt van r, worden gebruikt; zie evenwel de *Opmerking* hierna.
We zoeken dan het tweede snijpunt, hier ook Q genoemd, van de lijn DP met de kegelsnede.
$P_s \equiv X_1$ is dan het spiegelbeeld van P in het lijnstuk DF.
Dus is:

$Q = P_sF$ & $DP \equiv X_4$

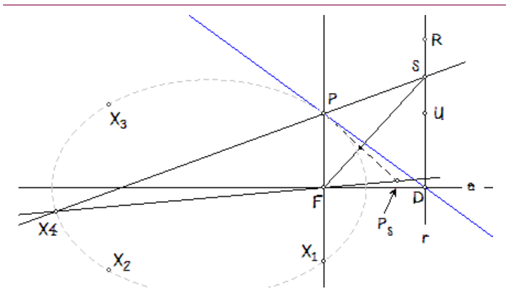
En dit dan is het *vierde* en laatste punt van de kegelsnede waarnaar we op zoek waren.



figuur 5

De kegelsnede kan nu met de Cabri-functie **Kegelsnede** worden getekend door de punten P, X_1, X_2, X_3 en X_4.

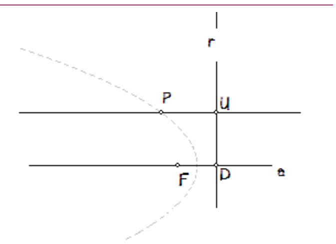
Opmerking. Ligt het punt P (toevallig) op de loodlijn in F op a, dan valt het punt X_4 (zoals dat hierboven via D is geconstrueerd) samen met het punt P. De lijn DP is dan de raaklijn in P aan de kegelsnede.
We beschikken dán over in totaal slechts *vier* verschillende punten van de kegelsnede! ◊



figuur 6a

Als op bovenstaande constructie(s) een *macro* moet worden gebaseerd – zie de volgende paragraaf – dan kan beter (en nu ook maar in *alle* gevallen) in plaats van het punt D, bijvoorbeeld, het midden S van het lijnstuk UR worden gebruikt. ***Zie figuur 6***, waarin R weer het spiegelbeeld is van D in U. Het punt P_s is in die figuur het spiegelbeeld van P in SF.[4]

Het is niet verstandig om (in plaats van het punt *D*) gebruik te maken van het punt *U* (de projectie van *P* op *r*), omdat bij een parabool de lijn *PU* evenwijdig is met de as *a* van de parabool.
Een tweede snijpunt van *PU* met de kegelsnede bestaat in dit geval niet.

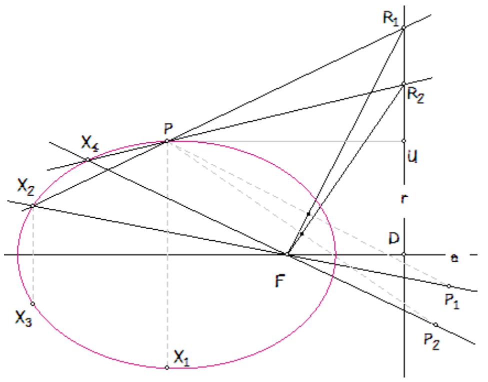


figuur 6b

Macro: KegelsnedePFR

Constructiestappen

Uitgaande van de in ligging gegeven punten *P* en *F* en de lijn *r*:

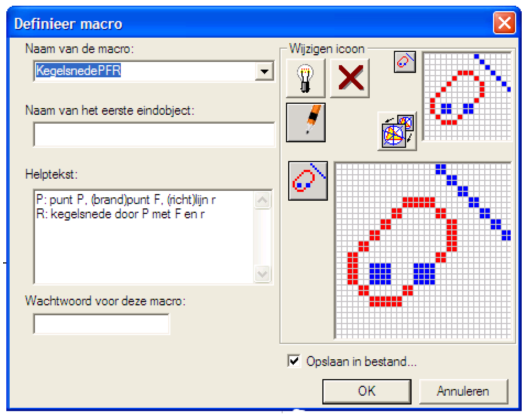


figuur 7

1. Construeer als bovenstaand het punt X_1 en de punten X_2, X_3 en X_4. [5]
   a is daarbij de loodlijn door *F* op *r* en $D = a$ & r.
   R_1 is het spiegelbeeld van *D* in *U* (de projectie van *P* op *r*) en R_2 is het midden van het lijnstuk UR_1.
   P_1 en P_2 zijn de spiegelbeelden van *P* in R_1F en in R_2F.
2. Kies de functie **Kegelsnede** in het *Cirkel-menu*.
3. Teken de kegelsnede door *P*, X_1, …, X_4.

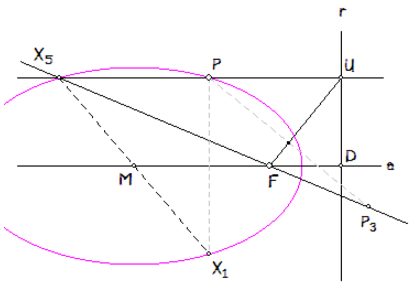
Definitie

1. Kies de Cabri-functie **Beginobjecten** (in het *Macro-menu*).
2. Selecteer (*in deze volgorde*) de objecten *P*, *F*, *r*.
3. Kies **Eindobjecten**.
4. En selecteer de getekende kegelsnede.
5. **Verberg** vervolgens de punten X_1, X_2, X_3 en X_4.
6. Kies de functie **Definieer macro**.
7. Bewaar de macro in een bestand op disk onder (bijvoorbeeld) de naam *KegelsnedePFR*.



figuur 8

Opmerking. Bij *centrale* kegelsneden (dat zijn kegelsneden met een middelpunt, d.w.z. *alleen* ellipsen of hyperbolen) is het soms handig direct te kunnen beschikken over het middelpunt *M*.



figuur 9

We kunnen *M* construeren door nogmaals een constructie uit te voeren als bovenstaand.
We gaan daartoe (nu wél) uit van het punt *U* (de projectie van *P* op *r*) en construeren het tweede snijpunt X_5 van *UP* met de kegelsnede. Is P_3 het spiegelbeeld van *P* in *UF*, dan is $X_5 = UP$ & P_3F.
Het punt *M* is dan het midden van het lijnstuk X_1X_5. (cq. $M = a$ & X_1X_5).

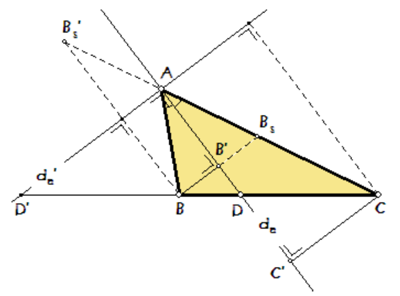
Het punt M kan uiteraard ook opgenomen worden in de macro-definitie. Kies dan in dit geval M als tweede *Eindobject* van de macro, na het selecteren van de kegelsnede (punt 4 in de macro-definitie hierboven).
Het punt X_5 (en daarmee ook het punt M) bestaat *alleen* bij een ellips of bij een hyperbool (bij een parabool is PU, zoals eerder reeds is opgemerkt, evenwijdig met de as a). Omdat een parabool geen middelpunt heeft, is dit niet van invloed op de met de macro uit te voeren constructie.

Noten

[1] De kegelsneden kunnen met de waarde van de excentriciteit worden geclassificeerd:
$e = 0$: cirkel; $0 < e < 1$: ellips; $e = 1$: parabool; $e > 1$: hyperbool

[2] Een *koorde* van een kegelsnede is het verbindingslijnstuk van twee punten van die kegelsnede. Een *voerstraal* van een kegelsnede is het verbindingslijnstuk van een punt van de kegelsnede met een brandpunt.

[3] De **bissectricestelling** voor een driehoek ABC luidt: *Is D het snijpunt van een bissectrice van hoek A met (het verlengde van) de zijde BC, dan is BD : CD = BA : CA.*



figuur n1

Bewijs. Nu is, met B' en C' als projecties van B en C op de (binnen)bissectrice AD van hoek A, driehoek BDB' gelijkvormig met driehoek CDC' (*hh*). Dus:
$BD : CD = BB' : CC'$
Ook zijn de driehoeken $BB'A$ en $CC'A$ gelijkvormig (*hh*). Daaruit volgt:
$BB' : CC' = BA : CA$
Zodat $BD : CD = BA : CA$.

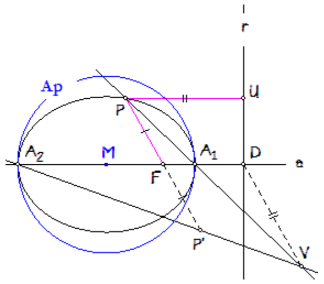
Een overeenkomstig bewijs kan worden geleverd voor de buitenbissectrice AD' van hoek A. ◊

De *omgekeerde* stelling van de bissectricestelling luidt: *Als voor het punt D op (het verlengde van) de zijde BC van een driehoek ABC geldt dat BD : CD = BA : CA, dan is de lijn AD een bissectrice van hoek A.*
Het bewijs van de omgekeerde stelling kan uit het ongerijmde worden geleverd, daarbij gebruik makend van de bissectricestelling zelf.

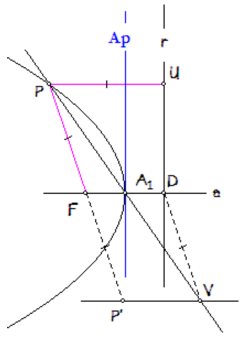
[4] Een andere manier om een punt van een kegelsnede te construeren is gebaseerd op de zogenoemde **Apollonius-cirkel**; dit is de meetkundige plaats van de punten X die een *vaste verhouding k* hebben tot twee gegeven punten A en B; d.w.z. $AX : BX = k : 1$.

Bij kegelsneden is $k = e$. Met F en D (= a & r) geldt nu voor twee punten A_1, A_2 op de hoofdas a (bij een parabool is dat alléén het punt A_1):
$A_1F : A_1D = A_2F : A_2D = e : 1$
De punten A_1 en A_2 (het zijn *toppen* van de kegelsnede) verdelen het lijnstuk FD dan *inwendig* én *uitwendig* in de verhouding $e : 1$. Het midden M van A_1A_2 is het middelpunt van de cirkel (die ook wel *hoofdcirkel* van de kegelsnede wordt genoemd) en daarmee *ook* het middelpunt van de ellips of van de hyperbool.

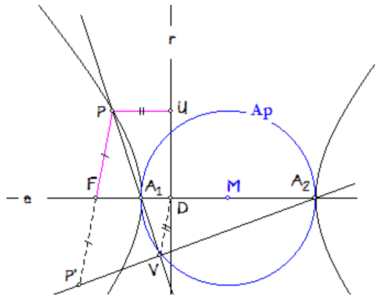
Nb. Bij een parabool ontaardt de Apollonius-cirkel Ap in de middelloodlijn van het lijnstuk FD. Een parabool heeft dus één top (en heeft *geen* middelpunt).



figuur n2a (0 < *e* < 1: ellips)



figuur n2b (*e* = 1: parabool)



figuur n2c (*e* > 1: hyperbool)

In bovenstaande figuren is P' het spiegelbeeld van P in F (zodat $P'F = PF$). Het punt V ligt zó op de lijn door D evenwijdig met PP' dat $DV = PU$. De lijn VP snijdt dan de as a in het punt A_1. De lijn VP' snijdt, bij de ellips en de hyperbool, de lijn a in het punt A_2; bij de parabool is VP' evenwijdig met a. Vierhoek $VDFP'$ is in dit laatste geval een parallellogram; het punt A_2 is dan het 'oneigenlijk snijpunt' (ook wel het 'punt op oneindig') van de lijnen a en VP'.

Om deze reden is het niet verstandig het punt A_2 te kiezen bij de constructie van een macro, omdat het punt A_2 bij een parabool niet bestaat.

Zie verder ook: *www.pandd.demon.nl/apolcirk.htm*

[5] Omdat het punt X_1 het spiegelbeeld is van het punt P in de lijn a, zal de macro *niet* werken als het punt P gelegen is *op* de lijn a.