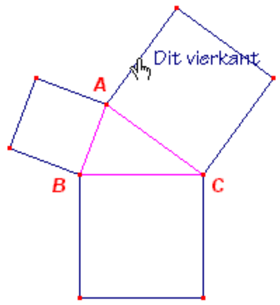
Cabri-werkblad

Driehoeken, rechthoeken en vierkanten

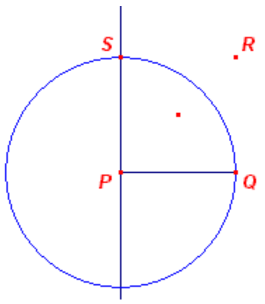
1. Eerst twee macro's



Bij de opdrachten van dit werkblad zullen we vaak een vierkant nodig hebben waarvan alleen de beide eindpunten van een zijde gegeven zijn. Daarom zullen we voor de constructie van zo'n vierkant een Cabri-macro maken (we doen dat in opdracht 1).
Die macro kunnen we dan gebruiken voor het maken van onder meer tekeningen zoals hiernaast.

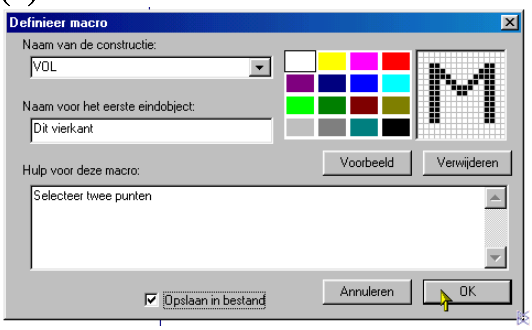
Opdracht 1

Zie eventueel de Opmerking na opdracht 2.

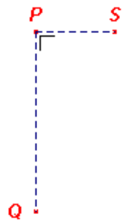


Teken een lijnstuk *PQ*, in *P* de loodlijn op dat lijnstuk en de cirkel met middelpunt *P* en straal *PQ*.
Die cirkel snijdt de loodlijn in het punt *S*.
In de figuur hiernaast is ook het punt *R* geconstrueerd, uitgaande van *alleen* de punten *P*, *Q* en S.

🖹 Geef aan hoe je *R* op die manier kan construeren.
Gebruik nu de Cabri-functie 'Veelhoek' om het vierkant *PQRS* te tekenen.
De eerder bedoelde macro definiëren we nu als volgt.
(1) Kies de functie 'Beginobjecten', en selecteer de punten *P* en *Q* – in deze volgorde.
(2) Kies dan 'Eindobjecten', en selecteer het vierkant.
(3) Kies nu de functie 'Definieer macro' en vul het venster als onderstaand in.



(4) Klik dan op de knop OK. De macro:VOL (Vierkant Op Lijnstuk) wordt dan op disk opgeslagen.
Ter controle…
Wis alle figuren op het tekenblad en teken dan een lijnstuk *AB*. Kies de macro:VOL (in het *Macro*-menu) en selecteer de punten *A* en *B* (in deze volgorde). Selecteer nu ook de punten *B* en *A* (in de andere volgorde dus).
🖹 Beschrijf je bevindingen.



We zullen verder ook een aantal keren een rechthoek moeten tekenen die gebaseerd is op een figuur zoals die hiernaast staat.
Hierin zijn eigenlijk alleen de punten *P*, *Q* en *S* gegeven; de lijnstukken *PQ* en *PS* dienen als hulp voor de constructie. Verder weten we ook dat hoek *SPQ* een rechte hoek is.

Opdracht 2

Zie eventueel de Opmerking na opdracht 2.

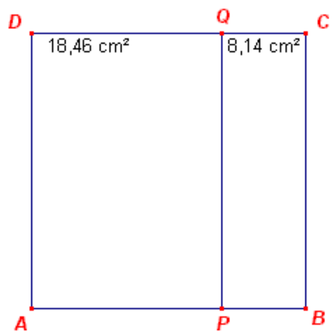
Wis alle objecten op het tekenblad en teken dan de punten *P*, *Q* en *S* en de lijnstukken *PQ* en *PS*.
Construeer nu het punt *R* dat samen met de reeds getekende punten een rechthoek *PQRS* vormt.
Leg dan de macro:Rechthoek3P (die '3P' staat voor 'drie punten') op disk vast.
Aanwijzing – Gebruik voor de rechthoek weer de functie 'Veelhoek'.

N.B. Let bij de definitie van de macro op de juiste volgorde bij het selecteren van de punten bij gebruik van de functie 'Beginobjecten'.

- Controleer de macrodefinitie door met Cabri zelf enkele figuren te maken waarbij je die macro gebruikt; lever deze figuren bij je antwoordblad in.
  Kijk ook eens wat de macro doet, als je uitgaat van een figuur waarin de drie gegeven punten *geen* rechte hoek bepalen.

Opmerking
Beide in bovenstaande opdrachten behandelde Cabri-macro's kunnen eventueel worden gedownload via
www.pandd.nl/werkbladen/driehvierh.zip
Indien men in de rest van het werkblad gebruik maakt van die macro's, wordt aangeraden de toelichting bij die macro's (eveneens opgenomen in het betreffende ZIP-bestand) zorgvuldig te lezen.
[einde Opmerking]

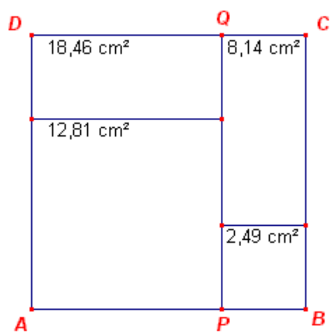
Opdracht 3



Teken op een nieuw tekenblad een lijnstuk *AB* met daarop een willekeurig punt *P*.
Teken met de macro:VOL het vierkant *ABCD* op de zijde *AB*. Verberg hierna het vierkant (de punten *C* en *D* blijven dan zichtbaar).
Teken met de macro:Rechthoek3P de *beide* rechthoeken *APQD* en *BCQP*.

Met $\mathcal{V}(X)$ geven we in hetgeen volgt de *oppervlakte van een figuur X* aan.

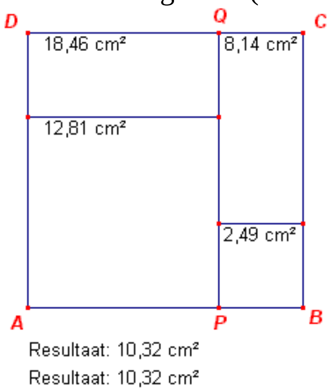
- Bereken nu $\mathcal{V}(APQD)$ en $\mathcal{V}(BCQP)$ met behulp van de functie 'Oppervlakte' (in het *Reken*-menu, het derde menu van rechts).
- (3.1) Bereken ook $\mathcal{V}(APQD) - \mathcal{V}(BCQP)$, het verschil van beide oppervlaktes.



Teken nu in dezelfde figuur met de macro:VOL het vierkant op het lijnstuk *AP* en het vierkant op het lijnstuk *PB*.

- Bereken $\mathcal{V}$(vierkant op *AP*) en $\mathcal{V}$(vierkant op *PB*).
- (3.2) Bereken ook het verschil van beide laatst berekende oppervlaktes.
- Beschrijf je bevindingen.

Opmerking
De berekeningen die je hierboven bij (3.1) en (3.2) hebt uitgevoerd, kunnen met behulp van de 'Rekenmachine' van Cabri worden gedaan (wellicht deed je dat ook wel).



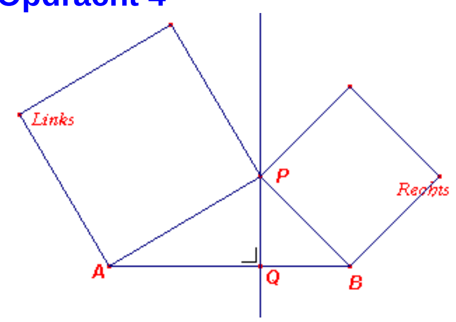
Kies de functie 'Rekenmachine' (weer in het *Reken*-menu) en klik in het (grote) rekenvenster.
Selecteer vervolgens het getal dat de oppervlakte van de eerste figuur voorstelt.
Klik dan op het minteken van de Rekenmachine en selecteer vervolgens het getal dat de oppervlakte van de tweede figuur voorstelt.
Klik vervolgens op het gelijkteken, dan op het antwoord en vervolgens op een geschikte plaats op het tekenblad.
Als je dat voor de rechthoeken en de vierkanten gedaan hebt, zie je iets als in de figuur hiernaast.

Zie voor een uitvoeriger toelichting van de 'Rekenmachine' bijvoorbeeld het werkblad 'Cabri's Rekenmachine'. Dit werkblad is te bekijken (en te downloaden) via *www.pandd.demon.nl/werkbladen/calc.htm*
[einde Opmerking]

- Verplaats het punt *P* op het lijnstuk *AB*. Formuleer dan op basis van hetgeen je constateert, een vermoeden. Bewijs zo mogelijk dat vermoeden (zie eventueel opdracht 4).

2. Meer over oppervlaktes

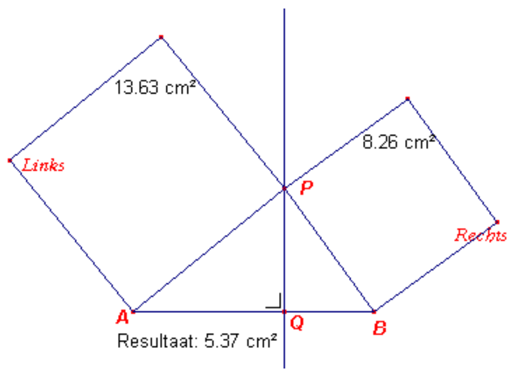
Opdracht 4



Teken op een nieuw tekenblad een lijnstuk *AB*, met daarop een willekeurig punt *Q*.
Kies op de loodlijn in *Q* op *AB* eveneens een willekeurig punt *P*.
Aanwijzing – Gebruik bij de willekeurige punten eventueel de functie 'PuntOpObject'.
Teken ook de vierkanten op de lijnstukken *AP* en *PB*.
Aanwijzing – Gebruik daarbij de macro:VOL.

Het vierkant *Links* zullen we in deze tekst aangeven met de letter *L*, het vierkant *Rechts* met de letter *R*.
Bereken de oppervlakte $\mathcal{V}(L)$ van *L* en de oppervlakte $\mathcal{V}(R)$ van *R*.
Bereken het *verschil* tussen beide oppervlaktes, $\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(R)$.

- Lever een afdruk van de door jou gemaakt figuur bij het antwoordblad in!



Beweeg nu het punt *P* over de loodlijn.

- Beschrijf je bevindingen.

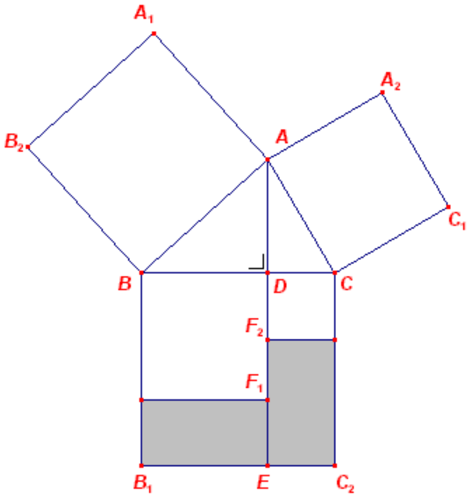
Zij nu $PQ = h$, $AQ = a$ en $BQ = b$.

- Druk *AP* uit in *a* en *h* en druk *BP* uit in *b* en *h*.
- Bereken op basis van deze uitkomsten het verschil tussen de oppervlaktes van de beide vierkanten.
- Waarom is nu $\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(R)$ constant, bij vaste positie van het punt *Q*?

Aan het einde van opdracht 3 werd je ook gevraagd een vermoeden te bewijzen.

- Waarom volgt het daar gevraagde bewijs direct uit het laatste resultaat van deze opdracht?
  Aanwijzing – Welke waarde van *h*?

Opdracht 5a



Hiernaast staat een *willekeurige* driehoek ABC, waarin AD de hoogtelijn is van A.
AA_1B_2B, BB_1C_2C en CC_1A_2A zijn de vierkanten op opvolgend BA, CB en AC.
Er zijn ook vierkanten getekend op DB en CD.

Iemand beweert dat hieruit, met hetgeen in de vorige opdrachten gevonden is, eenvoudig kan worden bewezen, dat

$$\mathcal{V}(AA_1B_2B) - \mathcal{V}(CC_1A_2A) = \mathcal{V}(BB_1ED) - \mathcal{V}(CC_2ED)$$

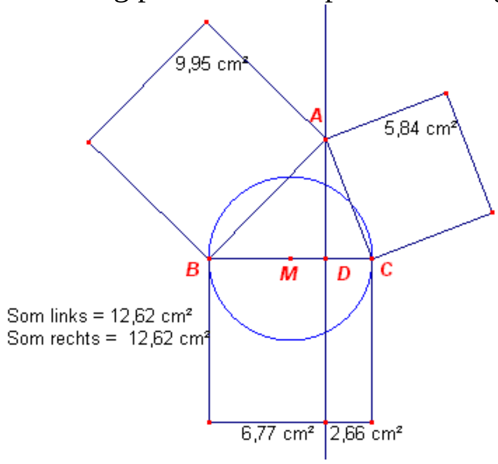
🖹 Geef zo'n bewijs. Geef daarbij duidelijk aan op welke opdrachten je conclusies gebaseerd zijn.

We kunnen het resultaat van opdracht 5a ook formuleren als:

$$\mathcal{V}(AA_1B_2B) + \mathcal{V}(CC_2ED) = \mathcal{V}(CC_1A_2A) + \mathcal{V}(BB_1ED)$$

Opdracht 5b

Kies een nieuw tekenblad met daarop een lijnstuk BC, waarvan M het midden is. Teken ook de cirkel met middelpunt M die door B (en door C) gaat.
Kies vervolgens een willekeurig punt D op BC en teken de loodlijn in D op BC met op die loodlijn een willekeurig punt A – dus op voorhand ligt A niet op de cirkel. Zie onderstaande figuur.



Maak de constructie verder af met vierkanten op BA en AC en met in een vierkant op CB 'passende' rechthoeken op BD en CD.

🖹 Bereken de sommen van de oppervlaktes van de figuren die (links en rechts) staan in de laatst genoemde formule bij opdracht 5a. Lever een afdruk van je constructie bij het antwoordblad in.

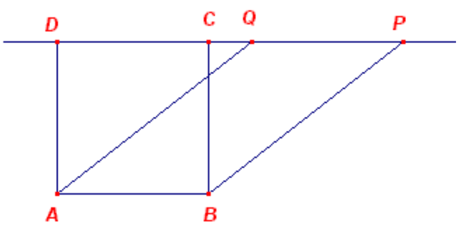
Verplaats nu het punt A over de loodlijn totdat A op de cirkel ligt.

🖹 Wat zijn je bevindingen dan (nog steeds)?

🖹 Welke *bekende* stelling volgt dan uit opdracht 5a bij deze bijzondere ligging van het punt A? Verklaar waarom.

3. In rechthoeken verdeelde vierkanten

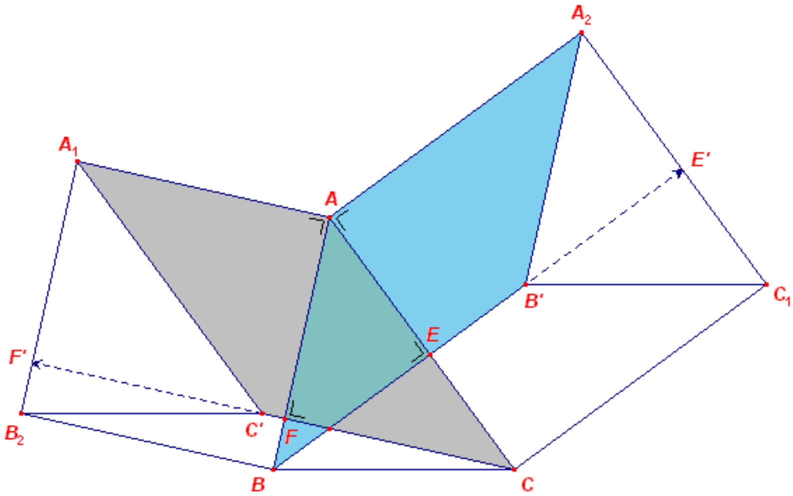
Opdracht 6



Bekijk nevenstaande figuur, waarin $ABCD$ een vierkant en $ABPQ$ een parallellogram is.

🖹 Bewijs dat $\mathcal{V}(ABCD) = \mathcal{V}(ABPQ)$.

Opdracht 7

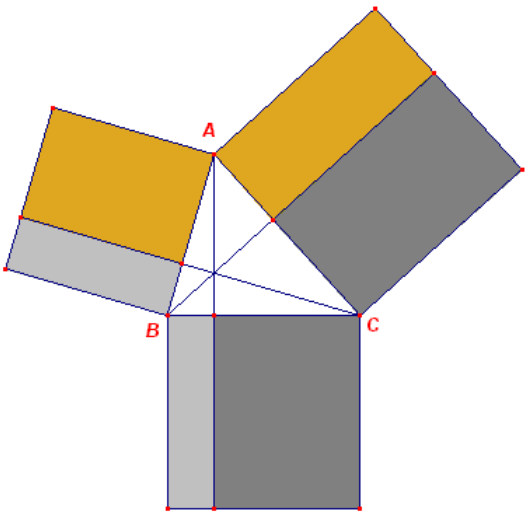


We gaan weer uit van een willekeurige driehoek ABC met vierkanten op de zijden AB en AC.
Driehoek ABC is twee keer verschoven:
- over de afstand EE' die langs de hoogtelijn BE valt;
- over de afstand FF' die langs de hoogtelijn CF valt.

Zie de driehoeken $A_2B'C_1$ en A_1B_2C'.

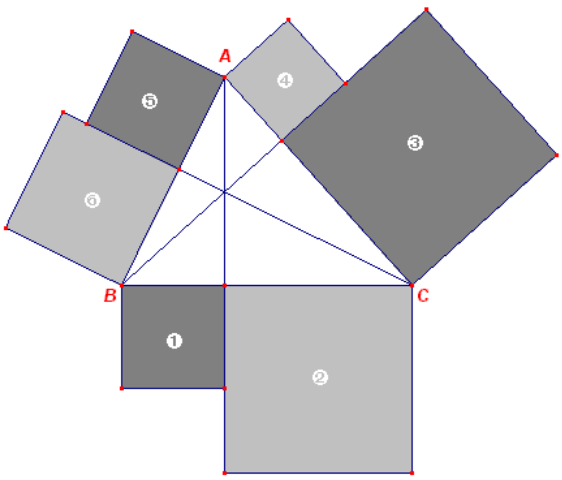
- Verklaar waarom de vierhoeken $AA_1C'C$ en $AA_2B'B$ parallellogrammen zijn.
  Aanwijzing – Zie eventueel opdracht 6.
- Toon aan dat beide parallellogrammen congruent zijn.
  Aanwijzing – Kijk daarbij o.a. naar de hoeken van beide parallellogrammen bij het punt A.
- Toon nu aan dat $\mathcal{V}(AA_1F'F) = \mathcal{V}(AA_2E'E)$.
  Aanwijzing – Waarom is $\mathcal{V}(AA_1C'C) = \mathcal{V}(AA_1F'F)$? Wat weet je van $\mathcal{V}(AA_2B'B)$ en $\mathcal{V}(AA_2E'E)$?

Opdracht 8



- Bewijs met behulp van de resultaten van opdracht 7 de volgende stelling.

> **Stelling**
> *De hoogtelijnen van een willekeurige driehoek verdelen de vierkanten op de zijden zó in zes rechthoeken, dat elk tweetal rechthoeken rond een hoekpunt van de driehoek gelijke oppervlaktes hebben.*



De hoogtelijnen van een driehoek verdelen de zijden van die driehoek weer in stukken. Als we nu op die stukken vierkanten plaatsen, dan kunnen we van die vierkanten weer de oppervlakte bepalen.
Van deze vierkanten hebben we ook hierboven (zie opdracht 3) al een eigenschap gevonden.
Maar er is meer…

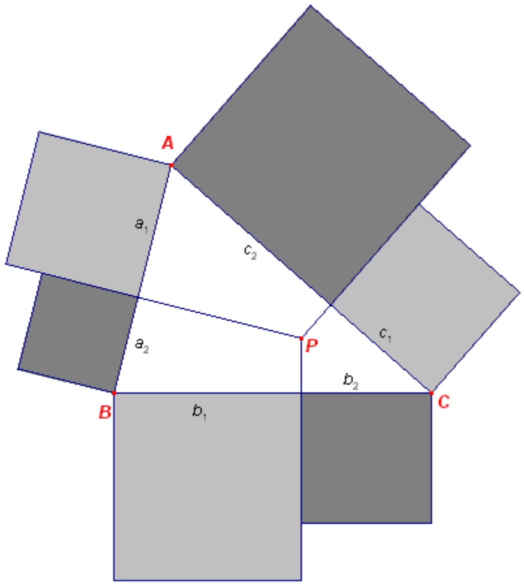
Opdracht 9

In de figuur hiernaast is een willekeurige driehoek ABC getekend met de hoogtelijnen en de vierkanten op de lijnstukken waarin die hoogtelijnen de zijden verdelen.

- Toon aan dat de som van de oppervlaktes van de vierkanten met de nummers 1, 3, 5 gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de vierkanten met de nummers 2, 4, 6.

4. Wat algemener

De eigenschap die in opdracht 9 werd behandeld, kan ook algemener worden geformuleerd.



Stelling (Jakob Steiner, 1828)
In een willekeurige driehoek ABC worden vanuit een willekeurig punt P (binnen de driehoek) loodlijnen neergelaten op de zijden van die driehoek. Dan geldt (zie figuur) voor de stukken van de zijden van de driehoek:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

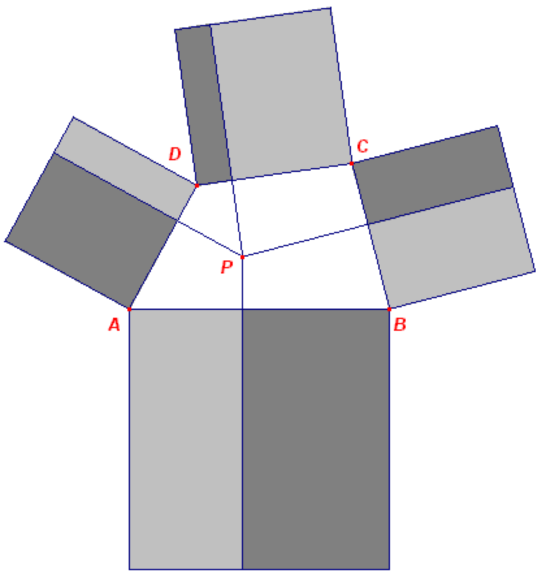
Opdracht 10

🗎 Bewijs deze stelling van Steiner.
Aanwijzing – Je kan daarbij wellicht gebruik maken van de Stelling die staat in opdracht 8.

De Stelling uit opdracht 10 heeft ook een veralgemenisering voor vierhoeken, vijfhoeken, …

Opdracht 11

Bekijk eerst nog eens het resultaat van opdracht 3 en van opdracht 5a, waarin een verband wordt gelegd tussen de verschillen van de oppervlaktes van vierkanten en die van rechthoeken.

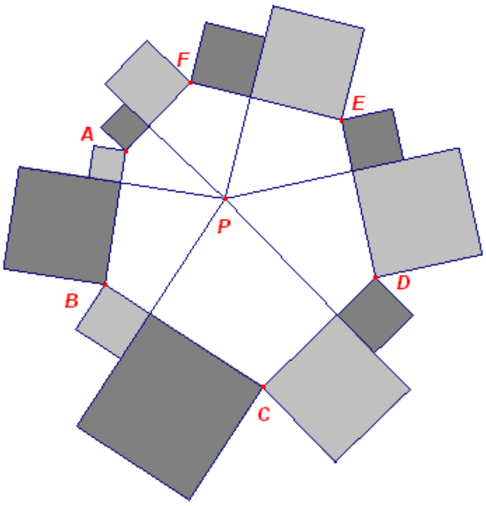


🗎 Bewijs dan de volgende stelling.

Stelling
In een willekeurige n-hoek AB… worden vanuit een punt P loodlijnen neergelaten op de zijden. Deze loodlijnen verdelen de vierkanten op de zijden in 2n rechthoeken, die gerekend vanuit het punt A de rij R_1, R_2, …, R_{2n} vormen.
Dan geldt dat de som van de oppervlaktes van de rechthoeken uit die rij met oneven index gelijk is aan de som van de oppervlaktes van rechthoeken uit die rij met even index.

Het is nu niet moeilijk meer deze laatste stelling om te zetten naar een stelling voor vierkanten die geplaatst zijn op de lijnstukken waarin de loodlijnen uit het punt *P* de zijden verdelen.
In opdracht 12 is dat geïllustreerd met een zeshoek.

Opdracht 12

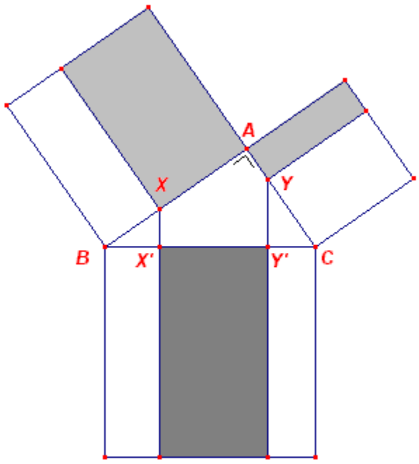


> **Stelling**
> *In een willekeurige n-hoek AB… worden vanuit een punt P loodlijnen neergelaten op de zijden. Op de 2n lijnstukken waarin de zijden door die loodlijnen worden verdeeld, worden vierkanten geplaatst die gerekend vanuit het punt A de rij Q_1, Q_2, …, Q_{2n} vormen.*
> *Dan geldt dat de som van de oppervlaktes van de vierkanten uit die rij met oneven index gelijk is aan de som van de oppervlaktes van vierkanten uit die rij met even index.*

🗎 Bewijs ook deze stelling.

5. Tot slot

Opdracht 13



Teken op een nieuw tekenblad een in A rechthoekige driehoek ABC.
Kies op de rechthoekszijden AB en AC opvolgend de punten X en Y.
X' en Y' zijn de voetpunten van de loodlijnen uit X en Y op de schuine zijde van ABC.
Teken ook vierkanten en rechthoeken als in de tekening hiernaast zijn aangegeven.

🗎 Wat is het verband tussen $\mathcal{V}$(rechthoek op AX), $\mathcal{V}$(rechthoek op AY) en $\mathcal{V}$(rechthoek op $X'Y'$)?
Aanwijzing – Onderzoek dat met Cabri.

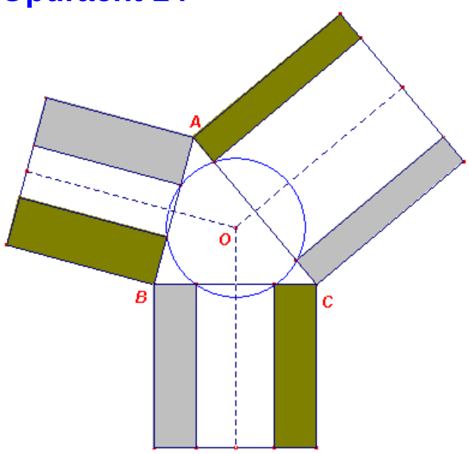
🗎 Geef zo mogelijk een bewijs van dat verband.

Deze eigenschap bij rechthoekige driehoeken kunnen we in speciale gevallen (bij bijzondere ligging van de punten X en/of Y) terugvinden in een tweetal hieraan voorafgaande opdrachten.

🗎 Op welke twee opdrachten wordt hierbij gedoeld?
Wat zijn die eigenschappen? Geef ook de bijzondere ligging van X en/of Y daarbij aan.

De opdrachten 14 en 15 zijn niet van vragen voorzien. De uitwerking daarvan wordt geheel aan de lezer overgelaten.

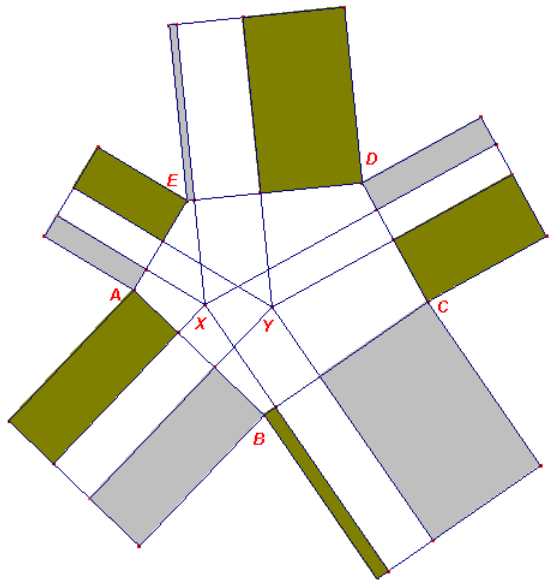
Opdracht 14



Driehoek ABC is willekeurig. O is het middelpunt van de omcirkel van ABC.
Met O als middelpunt is een cirkel getekend die de drie zijden van ABC 'inwendig' snijdt.
En er zijn weer vierkanten op de zijden getekend met daarin 'passende' rechthoeken.

🗎 …… (wees creatief).

Opdracht 15



Hiernaast is een willekeurige (convexe) vijfhoek *ABCDE* getekend.
De punten *X* en *Y* liggen binnen die vijfhoek. De loodlijnen uit *X* en *Y* op de zijden van de vijfhoek snijden die zijden weer inwendig.
Op de zijden zijn weer vierkanten getekend met daarin op de stukken van de zijden passende rechthoeken.

🖹 ……(wees creatief).