# Over de construeerbaarheid van gehele hoeken

Dick Klingens
maart 2005

## 1. Inleiding

In de getallentheorie worden algebraïsche getallen gedefinieerd via rationale veeltermen $f$ van de $n$-de graad in één onbekende:

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \quad (c_i \in \mathrm{Q})$$

Een **algebraïsch getal** is dan een oplossing (wortel) van de vergelijking $f(x) = 0$.
Een echte deelverzameling van de algebraïsche getallen vormen de **construeerbare getallen**; dit zijn getallen die de lengte zijn van een lijnstuk dat *met passer en liniaal* geconstrueerd kan worden.
Voorbeelden van construeerbare getallen zijn:

$$1,\ 2,\ \sqrt{3},\ \frac{22}{7},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{3}}$$

Over construeerbare getallen het volgende:

- Alle construeerbare getallen ontstaan uit 0 en 1 door (herhaald) optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en vierkantsworteltrekken.
- Elk construeerbaar getal is oplossing van een vergelijking van de vorm $f(x) = 0$, als bovenstaand, maar nu met $c_i$ geheel. De kleinst mogelijke $n$ die we hier kunnen nemen, is een macht van 2.

We zullen in het onderstaande alleen kijken naar het **construeerbaar** zijn van hoeken van een *geheel* aantal graden.

## 2. Construeerbaarheid

Het construeerbaar zijn van hoeken leggen we vast via construeerbare lijnstukken, omdat dat het verband tussen construeerbare hoeken en construeerbare getallen duidelijk maakt.

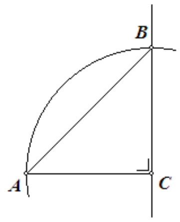
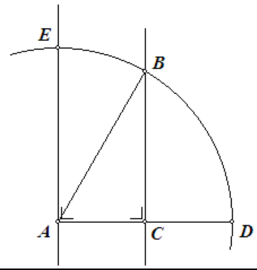
**Definitie**. Een hoek van $a°$ is construeerbaar indien de benen van die hoek construeerbaar zijn als lijnstukken met lengte $\sin(a°)$ en $\cos(a°)$.

We gaan daarbij uit van het volgende axioma.

**Axioma**. *Een lijnstuk met lengte* 1 *is construeerbaar*.

**Gevolg**. Een lijnstuk met lengte 2 is construeerbaar.

*Voorbeelden*

| $BAC = 45°$ | $BAC = 60°$, $BAE = 30°$ |
|---|---|
|   |   |
| $AC = 1$ | $AD = 2$ |

Hoeken van 90°, 45°, 60°, 30° zijn dus construeerbaar.

Eenvoudig is na te gaan dat:

**Stelling 1**. *Als een hoek van $a°$ construeerbaar is, dan zijn ook de hoeken van*

$$\frac{a°}{2},\ \frac{a°}{4},\ \ldots,\ \frac{a°}{2^k}$$

(*met* $k \in \mathrm{N}$) *construeerbaar*.

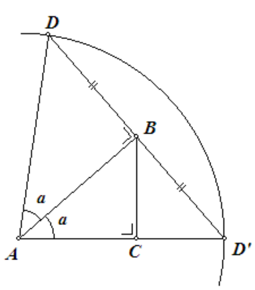
en dat:

**Stelling 2**. *Als een hoek van $a°$ construeerbaar is, dan zijn ook de hoeken van*

$$2a°, 3a°, \ldots, ka°$$

(*met* $k \in \mathrm{N}$) *construeerbaar*.

Mogelijke meetkundige constructies behorende bij stelling 1 en stelling 2 staan in de volgende figuur.




**Bisectie** van hoek *DAD'* (hier met een grootte van $2a°$):
- Bepaal de punten *D* en *D'* op de benen van hoek *A* met *DA* = *D'A*.
- Bepaal het midden *B* van *DD'*.
- De lijn *AB* deelt de beschouwde hoek middendoor.

**Verdubbeling** van de hoek *BAC* (ter grootte van $a°$):
- Teken een loodlijn in *B* op *AB* en bepaal het snijpunt *D'* met het been *AC*.
- Bepaal het punt *D* op die loodlijn met *BD* = *BD'*.
- Hoek *DAD'* is dan de verdubbelde hoek.

## 3. Waarom een hoek van 3° bijzonder is

**Stelling 3**. *Een hoek van 3° is construeerbaar*.

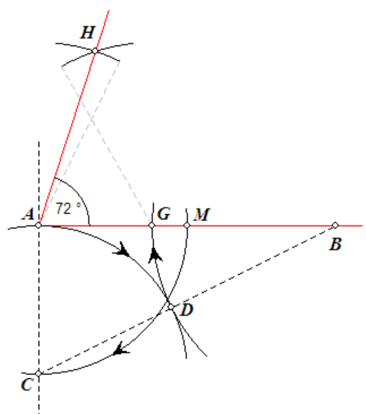
**Bewijs**. We weten dat een regelmatige vijfhoek construeerbaar is, en daarmee dus een hoek van 72° (zie ook de Opmerking onder dit bewijs). We hebben hierboven gezien, dat een hoek van 60° construeerbaar is.
Volgens stelling 1 zijn dan de volgende hoeken construeerbaar:

$$\frac{72°}{2}=36°,\ \frac{36°}{2}=18°,\ \frac{18°}{2}=9°,\ \frac{9°}{2}=4\tfrac{1}{2}°\ \ (=4°30')$$
$$\frac{60°}{2}=30°,\ \frac{30°}{2}=15°,\ \frac{15°}{2}=7\tfrac{1}{2}°\ \ (=7°30')$$

Dus ook het verschil van beide laatste hoeken is construeerbaar, en dat is een hoek van 3°.

**Een alternatief bewijs**. Een hoek van 72° - 60° = 12° is construeerbaar, en volgens stelling 1 dan ook hoeken van:

$$\frac{12°}{2}=6°,\ \frac{6°}{2}=3°$$




**Constructie van een hoek van 72°**
*AB* is een (gegeven) been van de te construeren hoek.
*M* is het midden van het lijnstuk *AB*.
Met de van een pijl voorziene cirkels *A*(*M*), *C*(*A*) en *B*(*D*) is het punt *G* op *AB* geconstrueerd. Het punt *G* verdeelt dan het lijnstuk *BA* in uiterste en middelste reden ($BG^2 = BA \cdot GA$; *gulden snede*).
De cirkels *G*(*B*) en *A*(*GB*) snijden elkaar in een punt *H*.
De lijn *AH* is het tweede been van de te construeren hoek.

**Opmerking**. De construeerbaarheid van een hoek van 72° is ook als volgt aan te tonen.
Uit de goniometrie weten we:

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2 a)\sin a\\ &= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha\\ &= (1-2\sin^2\alpha)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha\\ &= (1-4\sin^2\alpha)\cos\alpha\end{aligned}$$

Met behulp van deze formules vinden we

$$\begin{aligned}\sin 5\alpha &= \sin(3\alpha+2\alpha)=\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha\sin 2\alpha\\ &= (3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(1-2\sin^2\alpha)+(1-4\sin^2\alpha)\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

En na enig rekenwerk:

$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$$

Voor $\alpha=72°$ en $x=\sin\alpha$ gaat deze uitdrukking over in de vergelijking:

$$0=5x-20x^3+16x^5$$

**N.b.** Ook voor $\alpha=36°$ vinden we bovenstaande uitdrukking! Ook $x=\sin 36°$ is een oplossing van die vergelijking.

Na deling door *x* vinden we dan:

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$$
$$64x^4 - 80x^2 + 25 = 5$$
$$(8x^2 - 5)^2 = 5$$
Hieruit volgen twee positieve waarden van $x$ (negatieve waarden vervallen wegens $0 < x < 1$), te weten:
$$x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\ \ x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$
De grootste van beide is dan gelijk aan $\sin 72°$ (de andere is gelijk aan $\sin 36°$), omdat sin $x$ een stijgende functie is op het interval [0, ½π].

Zodat: $\sin 72° = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$ .

Dan is $\cos^2 72° = 1 - \sin^2 72° = 1 - \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{8} = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}$ .

En: $\cos 72° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ .

Waarmee is aangetoond, dat een hoek van 72° construeerbaar is (per definitie).

**Gevolg 3**. *Uit stelling 2 en 3 volgt: Elk veelvoud van een hoek van* 3° *is construeerbaar*.

**Stelling 4**. *Als een hoek van ka*° (met $k \in \mathrm{N}$) *niet construeerbaar is, dan is een hoek van a*° *niet construeerbaar*.

**Bewijs**. Stel de hoek van $a$° is *wel* construeerbaar. Dan is volgens stelling 2 ook de hoek van $ka$° construeerbaar.
Tegenspraak. Dus stelling 4 is juist.

**Stelling 5**. *Een hoek van* 20° *is niet construeerbaar*.

**Bewijs**. We gebruiken de hierboven reeds gebruikte uitdrukking voor $\cos 3\alpha$ (zie de Opmerking bij Stelling 3). Voor $\alpha = 20°$ hebben we dan:
$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$$
Met $x = \cos 20°$ en $\cos 60° = \frac{1}{2}$ geeft dat:
$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$
Uit de algebra is de volgende stelling bekend:
(Wantzel) *Als een 3e-graads vergelijking met rationale coëfficiënten geen rationale oplossing heeft, dan heeft die vergelijking evenmin een construeerbare oplossing*.
Stel nu dat $x = \frac{p}{q}$ een oplossing is van $8x^3 - 6x - 1 = 0$, dan is $p$ een deler van -1 (= $c_0$) en $q$ een deler van 8 (= $c_n$).
Dan zou gelden: $x = \cos 20° = \pm 1 \vee \pm\frac{1}{2} \vee \pm\frac{1}{4} \vee \pm\frac{1}{8}$. En dat is duidelijk niet zo. De vergelijking heeft geen rationale oplossing en dus geen construeerbare oplossing. Met andere woorden, cos 20° is niet construeerbaar. En volgens de definitie is dan een hoek van 20° niet construeerbaar.

**Gevolg 5**. *Volgens Stelling 4: Hoeken van* 10°, 5°, 4°, 2° *en* 1° *zijn niet construeerbaar*.

**Stelling 6**. *Als een hoek van a° construeerbaar is, dan is a een veelvoud van* 3.

**Bewijs**. Zij $b$ een hoek die geen veelvoud is van 3°, maar *wel* construeerbaar.
Omdat 3 niet deelbaar is op $b$ en 3 een priemgetal is, geldt: $ggd(3, b) = 1$.
Dan zijn er volgens het Euclidisch delingsalgoritme getallen $p$ en $q$ (met $p$, $q$ geheel) zo, dat

$$3p - bq = 1$$

Volgens stelling 2 is $3p = p \cdot 3$ construeerbaar, en dat is ook het geval met $qb$. Dus ook $3p - bq = 1$ is construeerbaar. Maar dit is in tegenspraak met het gevolg van stelling 5: een hoek van 1° is *niet* construeerbaar.
Waaruit de juistheid van de stelling volgt.

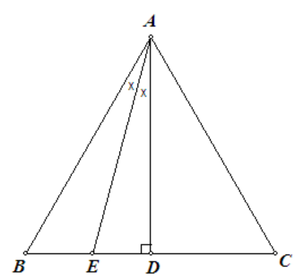
**Een alternatief bewijs**. We beperken ons tot gehele getallen tussen 0 en 90. Deze getallen kunnen worden opgedeeld in drie klassen modulo 3. Voor elke $a$ geldt dan $a = 3x$ of $a = 3x - 1$ of $a = 3x - 2$, voor zekere gehele $x$.
Stel nu dat de hoek van $a$° construeerbaar is, maar ongelijk aan $3x$°. Dan is $a = 3x - 1$ of $a = 3x - 2$.
Blijkens Gevolg 3 is de hoek $3x = x \cdot 3$ construeerbaar zodat ook $p = 3x - (3x - 1)$ of $p = 3x - (3x - 2)$ construeer is. Dus een hoek van $p$° met $p = 1$ of $p = 2$ is construeerbaar.
Dit is in tegenspraak met Gevolg 5.

Zodat we, Gevolg 3 en Stelling 6 samenvattend, vinden:

**Stelling 7**. *Een hoek a° (met a geheel) is construeerbaar DESDA a is een veelvoud van* 3.

## 4. Enkele berekeningen

**sin 15° en cos 15°**. In de gelijkzijdige driehoek $ABC$ (met zijde 2) in de figuur hiernaast is nu:
$DE : BE = DA : BA = \sqrt{3} : 2$ (*bissectricestelling*), of:
$DE : DB = \sqrt{3} : (2 + \sqrt{3})$




In driehoek $ADE$ is dan: $\tan 15° = \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$, zodat

$DE = 2\sqrt{3} - 3$ en $AE = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$.
Dan is:

$$\sin 15° = \frac{DE}{AE} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{(2\sqrt{3}-3)(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{12} = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{12} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

**sin 18° en cos 18°**. We hebben (reeds eerder gezien):

$$\sin 18° = \cos 72° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$\cos 18° = \sin 72° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

**sin 3° en cos 3°**. We hebben nu:

$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \tfrac{1}{16}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \\ &= \tfrac{1}{16}\left((\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\cos 3^\circ &= \cos(18^\circ - 15^\circ) = \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \tfrac{1}{16}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \\ &= \tfrac{1}{16}\left(2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} - (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)\end{aligned}$$

**sin 1°**. Hoewel we een hoek van 1° niet kunnen construeren, is het wel mogelijk een reële uitdrukking voor de sinus van een hoek van 1° te vinden.
Immers, stel $\alpha$ = 1° in de uitdrukking $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ en stellen we vervolgens sin 1° = $x$, dan gaat deze uitdrukking over in:

$$4x^3 - 3x + (\sin 3^\circ) = 0$$

We kunnen deze 3e-graads vergelijking oplossen. We vinden met behulp van (bijvoorbeeld) het computerprogramma Maple 9 drie oplossingen. Voor sin 1° is dat:

$$-\frac{1}{4}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{60}\right)+\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{60}\right)^2}\, I\right)^{(1/3)} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(-\sin\left(\frac{\pi}{60}\right)+\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{60}\right)^2}\, I\right)^{(1/3)}}$$
$$-\frac{1}{2} I\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{60}\right)+\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{60}\right)^2}\, I\right)^{(1/3)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(-\sin\left(\frac{\pi}{60}\right)+\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{60}\right)^2}\, I\right)^{(1/3)}}\right)$$

Merk op dat er in het antwoord gebruik gemaakt wordt van de letter $I$; daarmee wordt in Maple het imaginaire deel van de oplossing aangegeven.
Echter na evaluatie van de oplossing (ook met Maple) blijkt dat het imaginaire deel gelijk is aan 0:

$$0.0174524064 + 0.\, I$$

## Overzicht van construeerbare hoeken (veelvouden van 3°)

| hoek | sinus | benadering |
|---|---|---|
| $3^\circ = \frac{1}{60}\pi$ | $\frac{1}{16}\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)$ | 0,0523359562 |
| $6^\circ = \frac{1}{30}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1)$ | 0,1045284633 |
| $9^\circ = \frac{1}{20}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2} - 2\sqrt{5-\sqrt{5}})$ | 0,1564344650 |
| $12^\circ = \frac{1}{15}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15}+\sqrt{3})$ | 0,2079116908 |
| $15^\circ = \frac{1}{12}\pi$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ | 0,2588190451 |

| hoek | sinus | benadering |
|---|---|---|
| $18° = \frac{1}{10}\pi$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ | 0,3090169944 |
| $21° = \frac{7}{60}\pi$ | $\frac{1}{16}\left(2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\right)$ | 0,3583679495 |
| $24° = \frac{2}{15}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$ | 0,4067366431 |
| $27° = \frac{3}{20}\pi$ | $\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$ | 0,4539904997 |
| $30° = \frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | 0,5000000000 |
| $33° = \frac{11}{60}\pi$ | $\frac{1}{16}\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)$ | 0,5446390350 |
| $36° = \frac{1}{5}\pi$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ | 0,5877852523 |
| $39° = \frac{13}{60}\pi$ | $\frac{1}{16}\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$ | 0,6293203910 |
| $42° = \frac{7}{30}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)$ | 0,6691306064 |
| $45° = \frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 0.7071067812 |
| $48° = \frac{4}{15}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3})$ | 0,7431448255 |
| $51° = \frac{17}{60}\pi$ | $\frac{1}{16}\left(2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\right)$ | 0,7771459615 |
| $54° = \frac{3}{10}\pi$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ | 0,8090169944 |
| $57° = \frac{19}{60}\pi$ | $\frac{1}{16}\left(2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right)$ | 0,8386705679 |
| $60° = \frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 0,8660254038 |
| $63° = \frac{7}{20}\pi$ | $\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2})$ | 0,8910065242 |
| $66° = \frac{11}{30}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1)$ | 0,9135454576 |
| $69° = \frac{23}{60}\pi$ | $\frac{1}{16}\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}-2)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$ | 0,9335804265 |
| $72° = \frac{2}{5}\pi$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ | 0,9510565163 |
| $75° = \frac{5}{12}\pi$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ | 0,9659258263 |
| $78° = \frac{13}{30}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$ | 0,9781476007 |
| $81° = \frac{9}{20}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}})$ | 0,9876883406 |
| $84° = \frac{7}{15}\pi$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}})$ | 0,9945218954 |
| $87° = \frac{29}{60}\pi$ | $\frac{1}{16}\left(2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right)$ | 0,9986295348 |
| $90° = \frac{1}{2}\pi$ | 1 | 1,0000000000 |