Cabri-werkblad

Apollonius-cirkels

1. Doel

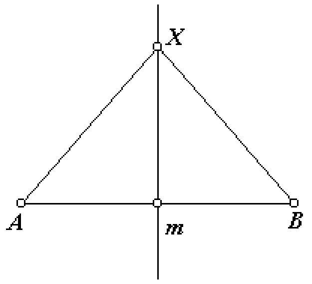
We zullen in dit werkblad kennismaken met de zogenoemde *Apollonius-cirkels* [1] van een driehoek. Daarvoor moeten ook enkele eigenschappen van (binnen- en buiten)bissectrices van een driehoek aan de orde komen.
We zullen ook kijken naar de *isodynamische punten* van een driehoek. Die punten hangen ten nauwste samen met Apollonius-cirkels.

We gaan er in dit werkblad van uit dat begrippen als «gelijkvormigheid», «evenredigheden in een driehoek», «omtrekshoeken», «koordenvierhoek» en «meetkundige plaats» bij de leerling bekend zijn; en voorts dat de leerling bekend is met het gebruik van onder meer de Cabri-functies 'Vermenigvuldiging' en 'Rekenmachine'.

N.b. In de opdrachten staat soms het teken 🖹. De bedoeling daarvan is dat de uitwerking van zo'n onderdeel in ieder geval opgenomen wordt in een verslag (of op een antwoordblad).

2. Inleiding

We kennen de middelloodlijn van een lijnstuk AB als de meetkundige plaats van de punten X die gelijke afstanden hebben tot de eindpunten van dat lijnstuk.



Voor elk punt X op de middelloodlijn m van AB geldt dan: $AX = BX$.
We kunnen dit laatste ook schrijven als:

$$\frac{AX}{BX} = 1, \text{ of als } AX : BX = 1:1$$

Deze laatste manier van schrijven (als *evenredigheid*) zullen we in hetgeen volgt wat vaker toepassen.

We gaan in dit werkblad op zoek naar de meetkundige plaats van de punten X waarvoor de afstanden AX en BX tot de eindpunten A en B van een lijnstuk een andere verhouding hebben dan 1 : 1; dus iets als $p : q$.

We beginnen eenvoudig.

Wat is de meetkundige plaats van de punten X waarvoor de afstanden AX en BX tot de eindpunten van een lijnstuk AB zich verhouden als 2 : 1*?*

Dus AX is nu twee keer zo groot als BX; of anders geschreven:

$$AX = 2BX$$

of ook:

$$AX : BX = 2 : 1$$

Opdracht 1

🖹 Teken op een bij je verslag te voegen papier een lijnstuk AB en kijk eens of je op dat lijnstuk tussen A en B een punt X kunt aangeven waarvoor geldt dat $AX = 2BX$.

---

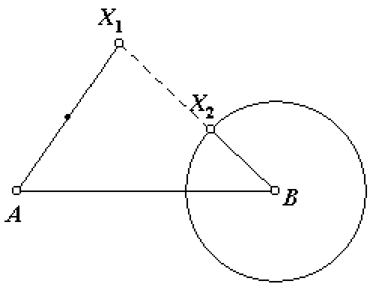
[1] Naar Apollonius van Perga (± 250–190 v.Chr).

Op de lijn *AB* (die lijn wordt ook wel de *drager* van het lijnstuk *AB* genoemd) ligt nog een tweede punt, we noemen het *Y*, dat voldoet aan $AY = 2BY$.

🖹 Teken ook het punt *Y*.

Maar er zijn meer punten zoals de punten *X* en *Y*. En die liggen *niet* op de drager van *AB*!

Opdracht 2



In de figuur hiernaast geldt voor de punten X_1 en X_2: $AX_1 = 2BX_2$.

🖹 Wat moet er nu met de punten X_1 en X_2 gebeuren, wil je kunnen spreken van $AX = 2BX$?

🖹 Zijn nu alle zijden van driehoek *ABX* bekend? Licht je antwoord kort toe.

🖹 Hoeveel driehoeken *ABX* kun je tekenen (denk je)?

🖹 Teken in een figuur nog een 8-tal punten *X* waarbij steeds $AX = 2BX$.

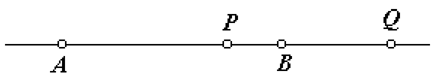
Opdracht 3

Heb je een vermoeden van de meetkundige plaats van het punt *X* (als $AX = 2BX$)?

🖹 Zo niet, teken dan nog eens wat meer punten *X* in de figuur van Opdracht 2. Of, bekijk de **CabriJava-applet** die te vinden is op http://www.pandd.nl/werkbladen/wbapolcirk_m1.htm. [2]

🖹 En zo ja, formuleer je vermoeden. Geef daarbij een zo nauwkeurig mogelijke beschrijving van die meetkundige plaats.

3. Eerste intermezzo



We gaan weer uit van een lijnstuk *AB*.
Op de drager van *AB* liggen de (verschillende) punten *P* en *Q* zo, dat:
$AP : BP = 3 : 1$ en $AQ : BQ = 3 : 1$

Of anders:
$AP = 3BP$ en $AQ = 3BQ$

Merk nu op dat $BP = \frac{1}{4}AB,\ \ AP = \frac{3}{4}AB$ en dat $BQ = \frac{1}{2}AB,\ \ AQ = \frac{3}{2}AB$.

We zeggen nu dat de punten *P* en *Q* het lijnstuk *AB* **inwendig** (via het punt *P*) en **uitwendig** (via het punt *Q*) **verdelen** in de verhouding 3 : 1.

Afspraak. We spreken af dat in de Opdrachten 4 tot en met 7 het punt *P* steeds ligt 'op' het lijnstuk *AB* (dus tussen *A* en *B*), en dat het punt *Q* steeds 'buiten' dat lijnstuk ligt (dus op het verlengde van *AB* of op het verlengde van *BA*).

Opdracht 4

– Teken een lijnstuk *AB* met daarop de punten *P* en *Q* die het lijnstuk *AB* in- en uitwendig verdelen in de verhouding 3 : 2.

🖹 Vul nu in: $BP = \frac{\dots}{\dots}AB$

$BQ = \frac{\dots}{\dots}AB$

Opdracht 5

We gaan er in deze opdracht van uit dat de punten *P* en *Q* het lijnstuk *AB* in- en uitwendig verdelen in de verhouding $p : q$.

---

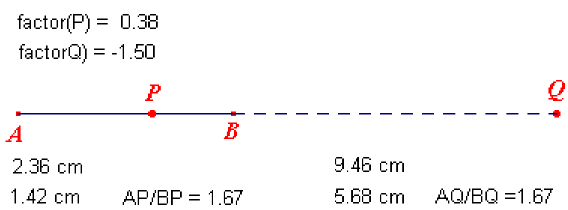
[2] Voor het uitvoeren van een CabriJava-applet via een webbrowser moet die webbrowser beschikken over zogenoemde Java-mogelijkheden.

En vul weer in: $BP = \frac{\dots}{\dots} AB$

$BQ = \frac{\dots}{\dots} AB$

Bovenstaande berekeningen kunnen worden toegepast bij de constructie van de punten P en Q met één van de standaard functies van Cabri, namelijk met de functie 'Vermenigvuldiging' (opgenomen in het *Afbeeldingen*-menu van Cabri; dat is het zesde menu van links).
We laten die constructie hieronder zien.
We kiezen daarbij het punt B als centrum voor de vermenigvuldiging van het punt A. We gaan uit van de verhouding 5 : 3 (= 1,67).
Omdat de punten Q en A aan *verschillende* kanten van B liggen, moeten we de te gebruiken vermenigvuldigingsfactor in dit geval (voor het construeren van het punt Q) van een *min-teken* voorzien (waarom moet dat?).

– Teken op een nieuw Cabri-tekenblad een lijnstuk AB.
– Plaats de te gebruiken factoren $\frac{3}{8}$ en $-\frac{3}{2}$ (ga na hoe deze breuken zijn ontstaan) op het scherm, eventueel met behulp van Cabri's Rekenmachine.
– Kies dan de functie 'Vermenigvuldiging', selecteer het punt A, vervolgens het punt B en dan de te gebruiken factor. Dit geeft dan, bij twee keer toepassen, de punten P en Q.



We kunnen de constructie controleren met de functie 'Afstand' (in het *Meten*-menu; het derde menu van rechts). In bovenstaande figuur zijn de afstanden AP, BP, AQ, BQ op het scherm gezet en zijn de breuken AP/BP, AQ/BQ weer met de functie 'Rekenmachine' berekend.

Opdracht 6

– Voer de hierboven beschreven constructie ter oefening ook zelf uit.
– Ga voor jezelf eens na welke factoren je moet gebruiken als je (in plaats van het punt B) het punt A als centrum van de vermenigvuldiging kiest (en dan dus het punt B vermenigvuldigt om de punten P en Q te krijgen).

Opdracht 7

We bekijken vervolgens de verhouding $AP : BP = AQ : BQ = 3 : 7$ (= 0,43).
Het punt Q moet nu (met B als centrum van de vermenigvuldiging) aan *dezelfde* kant van B liggen als het punt A (het punt Q ligt dus op het verlengde van BA).

Waarom ligt Q aan dezelfde kant van B als het punt A?

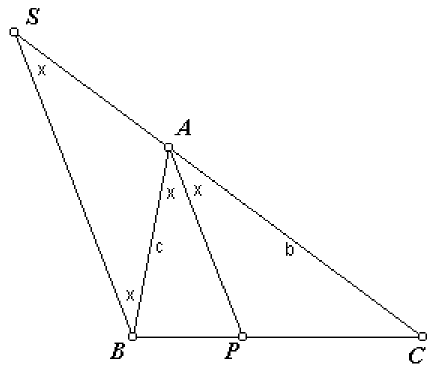
– Voer de constructie van de punten P en Q nu zelf in Cabri uit.

Voeg een (papieren) afdruk van de constructie toe aan je verslag.

4. Een eigenschap van de bissectrices van een driehoek

We beginnen met het bewijs van de zogenoemde *bissectricestelling* in een driehoek.

Stelling 1a. (Bissectricestelling) Een (binnen)bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde *inwendig* in stukken die zich verhouden als de twee andere zijden.



In de figuur snijdt de bissectrice van hoek A de zijde BC in het punt P.

Als nu $BA = c$ en $CA = b$, dan zegt stelling 1a:

$$BP : CP = BA : CA = c : b$$

Door het punt B is ook een lijn getekend die evenwijdig is met AP. Deze lijn snijdt de lijn CA in het punt S.
De letters x in de figuur duiden op gelijke hoeken.

Opdracht 8a

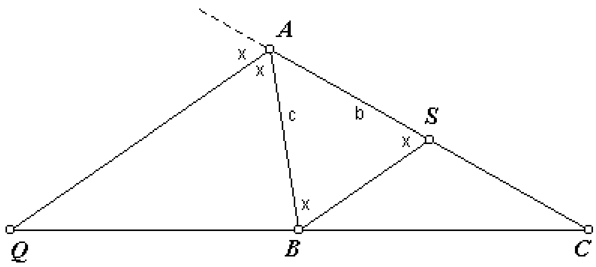
- Waarom zijn de hoeken die met een x zijn aangegeven, gelijk?

Bekijk driehoek BCS, met daarin dus AP // SB.

- Wat weet je van de verhoudingen $SA : AC$ en $BP : PC$?
- Verklaar waarom inderdaad $BA : CA = BP : CP$.

Eenzelfde stelling geldt ook voor de *buitenbissectrice* van een hoek in een driehoek (een buitenbissectrice van een driehoek is de bissectrice van een buitenhoek van die driehoek).

Stelling 1b. (vervolg Bissectricestelling) Een buitenbissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde *uitwendig* in stukken die zich verhouden als de twee andere zijden.



Stelling 1b zegt nu:

$$BQ : CQ = BA : CA = c : b$$

In de figuur hiernaast is AQ de buitenbissectrice van hoek A. De lijn BS is evenwijdig met AQ. Ook nu zijn gelijke hoeken in de figuur aangegeven met de letter x.

Opdracht 8b

Bekijk driehoek CAQ met daarin de evenwijdige lijnstukken BS en AQ.

- Wat weet je van de verhoudingen $CA : SA$ en $CQ : CB$?
- Maak het bewijs van stelling 1b zelf verder af.

Ook de omgekeerde stellingen van stelling 1a en stelling 1b gelden. We geven geen bewijs [3], maar vatten ze samen in één stelling:

Stelling 2. Als P een punt is op de zijde BC van een driehoek ABC en er geldt verder dat

$$BP : CP = BA : CA$$

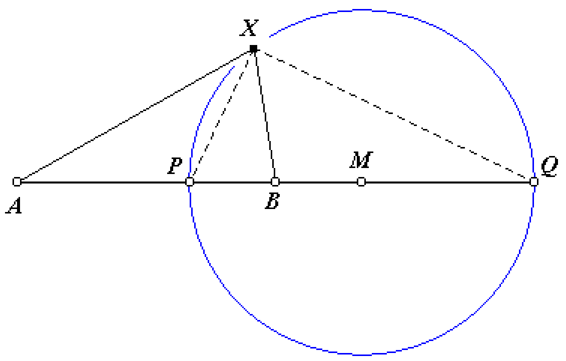
dan is AP de (binnen)bissectrice van hoek A als P tussen B en C ligt, en de buitenbissectrice van hoek A als dat niet het geval is.

We maken van deze omgekeerde stelling gebruik in de volgende paragraaf.

[3] Een dergelijk bewijs kan via een zogenoemd 'bewijs uit het ongerijmde' met behulp van de stellingen 1a en 1b echter eenvoudig worden geleverd.

5. De Apollonius-cirkel

Bij Opdracht 3 heb je wellicht het vermoeden beschreven dat de verzameling van de punten X waarvoor $AX = 2BX$ een cirkel is. En dat is ook zo.
Die cirkel wordt de **Apollonius-cirkel van de punten A en B** (bij de verhouding 2 : 1) genoemd.
Deze Apollonius-cirkel is in onderstaande figuur getekend; het middelpunt M daarvan is het midden van het lijnstuk PQ (en ligt dus ook op de lijn AB).



Maar een bewijs voor de juistheid van dat vermoeden ontbreekt vooralsnog.

(a) Kunnen we bewijzen dat X op de cirkel met middellijn PQ ligt, als we weten dat $AX = 2BX$?
(b) En omgekeerd, kunnen we bewijzen dat $AX = 2BX$, als we weten dat X op de cirkel met middellijn PQ ligt?

Van de punten P en Q weten we in beide gevallen dat $AP = 2BP$ en $AQ = 2BQ$.

Opdracht 9

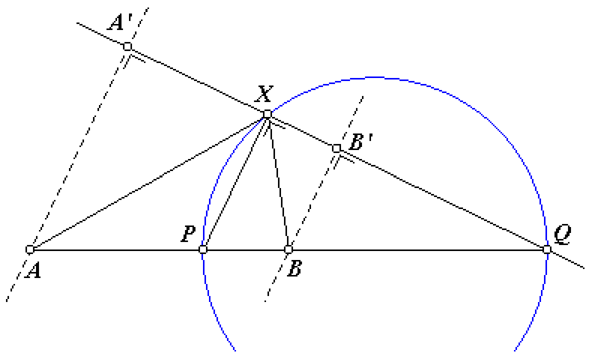
Het antwoord op vraag (a) kan eenvoudig worden gegeven met behulp van stelling 2.
- Wat weet je van de verhouding $AP : BP$ in driehoek ABX?
- En wat weet je van de verhouding $AX : BX$ in dezelfde driehoek?
- Wat weet je dan van XP op grond van stelling 2?

- Wat weet je van de verhouding $AQ : BQ$ bij driehoek ABX?
- Wat weet je dan van XQ op grond van stelling 2?

En nu nog bewijzen dat het punt X ligt op de cirkel met middellijn PQ!
Als dat zo is, dan zegt de *stelling van Thales* (hoe luidt die stelling ook al weer?) dat hoek $PXQ = 90°$.
- En waarom is dat hier inderdaad zo?

Opdracht 10

Voor het antwoord op vraag (b) zou je kunnen proberen te bewijzen dat XP bissectrice is van hoek AXB in driehoek AXB. De lijn XQ is dan vanzelf buitenbissectrice van hoek A.
- Waarom is XQ *vanzelf* buitenbissectrice van hoek A?

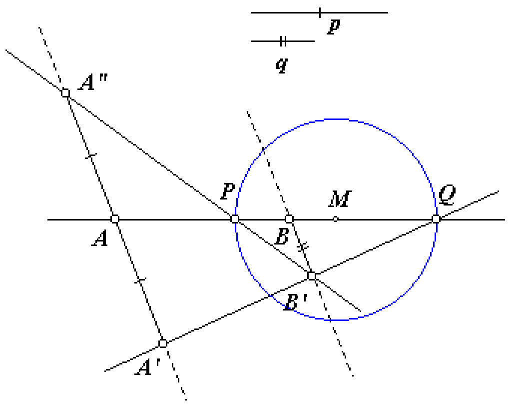


Maar zonder hulplijnen lijkt een dergelijk bewijs niet zo voor de hand te liggen; vandaar de twee hulplijnen in nevenstaande figuur: BB' en AA' staan beide loodrecht op QX.
Door de loodlijnen (ze zijn immers evenwijdig) vind je de verhoudingen tussen de lijnstukken op de lijn AQ ook terug op de lijn $A'Q$.
Daardoor is (bijvoorbeeld) $A'X = 2XB'$.

- Welke hoek(en) hebben de driehoeken BXB' en AXA' gelijk?
- Waarom zijn de driehoeken BXB' en AXA' gelijkvormig?
- Met welke factor kunnen we dan driehoek BXB' vermenigvuldigen om driehoek AXA' te krijgen?
- Wat kunnen we hieruit afleiden voor de relatie tussen AX en BX?

6. Constructie en Cabri-macro

Is de 'Apollonius-verhouding' $AX : BX$ gegeven door de lengte van twee lijnstukken p en q (dus dan is $AX : BX = p : q$), dan verloopt de constructie van de Apollonius-cirkel het eenvoudigst op basis van gelijkvormigheid van driehoeken.



Constructiebeschrijving:
Teken op een lijn door A het lijnstuk p aan weerszijden van A (het punt A is dan het midden van het lijnstuk met lengte $2p$).
Teken op een lijn door B, evenwijdig met die door A, het lijnstuk q.
In de figuur krijgen we dan opvolgend de lijnstukken $AA' = p$, $AA'' = p$ en $BB' = q$.
De verbindingslijnen van de eindpunten (in de figuur zijn dat $B'A'$ en $B'A''$) snijden de drager van het lijnstuk AB in de punten P en Q.

De punten P en Q verdelen het lijnstuk AB dan in- en uitwendig in stukken die zich verhouden als $p : q$.
De cirkel met middellijn PQ is de gevraagde Apollonius-cirkel.

Opdracht 11

🖹 Bewijs de juistheid van bovenstaande constructie. Met andere woorden, bewijs dat:
$AP : BP = AQ : BQ = p : q$

Opdracht 12

– Construeer eenzelfde figuur als de figuur die aan het begin van deze paragraaf staat.
Deze constructie zullen we in Opdracht 13 gebruiken voor het vastleggen van een Cabri-macro.
Ga bij de constructie (op een nieuw Cabri-tekenblad) uit van gegeven punten A en B (*geen* lijnstuk) en van de lijnstukken p, q.
De lijn door A waarop het lijnstuk p tweemaal is overgebracht, heeft een willekeurige richting.

🖹 Voeg de door jou geconstrueerde figuur aan je verslag toe.
Vermeld daarbij zo kort mogelijk de gevolgde constructiestappen.

Je kan deze constructie uiteraard ook gebruiken om de ligging van de Apollonius-cirkel te onderzoeken voor verschillende lengtes van de lijnstukken p en q.

🖹 Doe dat voor $p > q$, $p = q$ en $p < q$.
Beschrijf je waarnemingen bij deze gevallen kort en bondig.

Opdracht 13 – macro:ApolloniusCirkel(pq)

Als je de constructie van Opdracht 12 juist hebt uitgevoerd, dan is het mogelijk op basis daarvan een Cabri-macro vast te leggen.
Definitiestappen:

– Kies de functie 'Beginobjecten' en selecteer de punten A en B, en daarna de lijnstukken p en q.
– Kies dan de functie 'Eindobjecten' en selecteer de geconstrueerde Apollonius-cirkel én de punten P en Q.
– Kies tenslotte de functie 'Definieer macro'. Geef de macro bijvoorbeeld de naam *ApolloniusCirkel(p,q)* en bewaar de macro op disk.

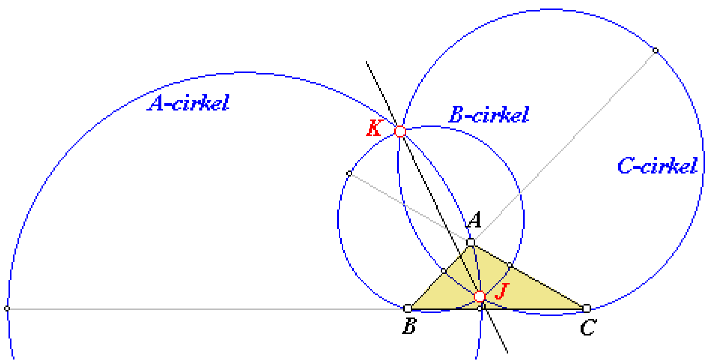
Opmerking.
Deze macro is (in twee versies) ook beschikbaar via http://www.pandd.nl/werkbladen/apolcirk.zip.

In het betreffende ZIP-bestand zijn onder meer opgenomen **ApolCirk(pq).1.mac** (voor Cabri Geometry II voor Windows) en **ApolCirk(pq).2.mac** (voor Cabri Geometry II Plus voor Windows).
[einde Opmerking]

7. De Apollonius-cirkels van een driehoek

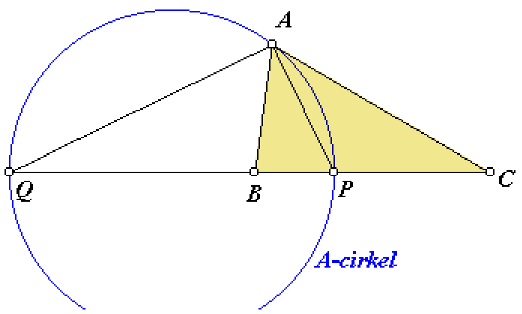
Met de in de vorige paragraaf gedefinieerde macro kunnen we de drie Apollonius-cirkels van een driehoek redelijk eenvoudig construeren.

De zogenoemde ***A*-Apollonius-cirkel** van driehoek *ABC* is de Apollonius-cirkel van de hoekpunten *B* en *C* met verhouding *c* : *b*, de ***B*-Apollonius-cirkel** is de Apollonius-cirkel van *C* en *A* met verhouding *a* : *c* en de ***C*-Apollonius-cirkel** is de Apollonius-cirkel van *A* en *B* met verhouding *b* : *a*.
Wordt de macro gebruikt, dan moet driehoek *ABC* geconstrueerd zijn met *lijnstukken AB*, *BC*, *CA* als zijden (en dus *niet* met de Cabri-functie 'Driehoek').
In de onderstaande figuur zien we de drie bedoelde Apollonius-cirkels van driehoek *ABC*.



Opdracht 14

Uit de figuur blijkt dat de *A*-Apollonius-cirkel (in de figuur aangeven met *A-cirkel*) van driehoek *ABC* door het hoekpunt *A* gaat.



- Bewijs dat!
  Aanwijzing. Wat weet je van *BA* : *CA* (zie stelling 1)?
- Waarom zijn de lijnen *AP* en *AQ* opvolgend de (binnen)bissectrice en de buitenbissectrice van hoek *A*?

Uit dit laatste blijkt dat het mogelijk is de *A*-Apollonius-cirkel met behulp van de binnen- en buitenbissectrice van hoek *A* te construeren.

- Geef kort aan hoe je dat kunt doen.

Opmerking.
Natuurlijk gaat de *B*-Apollonius-cirkel van driehoek *ABC* door *B* en de *C*-Apollonius-cirkel door *C*.
[einde Opmerking]

Maar er is meer!

Uit de eerste figuur in deze paragraaf blijkt ook dat de drie Apollonius-cirkels van een driehoek twee gemeenschappelijke snijpunten hebben.
Deze snijpunten van de Apollonius-cirkels worden de **isodynamische punten** van de driehoek genoemd.

Opdracht 15

– Construeer met Cabri de drie Apollonius-cirkels van een driehoek.
  Dat kan natuurlijk met behulp van de macro *ApolloniusCirkel(p,q)* of door de binnen- en buitenbissectrices van de hoeken te gebruiken (zie voor dit laatste Opdracht 14).
  Aanwijzing bij gebruik van de macro.
  Zorg dat de macro geladen is. Kijk daartoe in het *Macro*-menu van Cabri (in de lijst moet je dan een functie zien als *ApolloniusCirkel*).
  Kies die functie en selecteer de punten B en C (in deze volgorde) en dan de zijden BA en CA (ook in deze volgorde). De A-Apollonius-cirkel wordt daarna getekend.

– Ga dan na dat bij verplaatsing van de hoekpunten van driehoek ABC de Apollonius-cirkels inderdaad steeds twee gemeenschappelijke snijpunten hebben.

8. Isodynamische punten

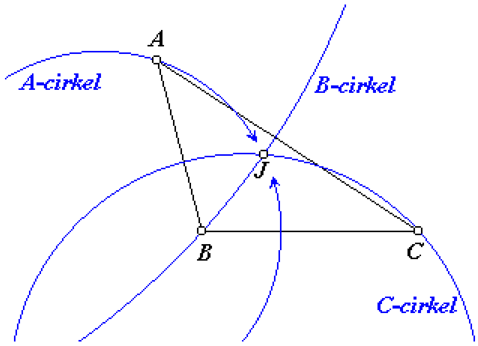
Het is niet zo moeilijk te bewijzen dat, als twee Apollonius-cirkels van een driehoek elkaar snijden, ook de derde Apollonius-cirkel van die driehoek door zo'n snijpunt gaat. We geven een bewijs in Opdracht 16.

Opdracht 16

We merken allereerst – en wellicht ten overvloede – op dat de B-cirkel de meetkundige plaats is van de punten X waarvoor geldt dat $AX : CX = c : a$.

🖹 Geef eenzelfde formulering voor de punten X op de C-cirkel.

Zij nu J een snijpunt van de B-cirkel en de C-cirkel. We moeten nu bewijzen dat het punt J ook op de A-cirkel ligt.



🖹 Waarom is: $\dfrac{AJ}{CJ} \times \dfrac{BJ}{AJ} = \dfrac{c}{a} \times \dfrac{a}{b}$? Wat volgt hier direct uit?

🖹 Wat weet je nu van het punt J? Geef een korte toelichting bij je antwoord.

We hebben hiermee bewezen:

Stelling 3. De Apollonius-cirkels van een driehoek hebben twee gemeenschappelijke snijpunten.

9. Tweede intermezzo

Het woord 'isodynamisch' is afgeleid van de Griekse woorden ισος (= gelijk; uitgesproken als 'isos') en δυναμις (= macht; uitgesproken 'als dunamis').
Isodynamische punten zijn blijkbaar punten die *gelijke machten* hebben.
De producten

$$PA \cdot BC,\ \ PB \cdot CA,\ \ PC \cdot AB$$

worden in driehoek ABC wel opvolgend de **hoekpuntsmacht van P bij A**, de hoekpuntsmacht van P bij B en de hoekpuntsmacht van P bij C genoemd.

Opdracht 17

- Bewijs dat het punt J – één van de snijpunten van de drie Apollonius-cirkels van driehoek ABC – gelijke hoekpuntsmachten heeft bij de drie hoekpunten van die driehoek.

10. Wat meer isodynamiek

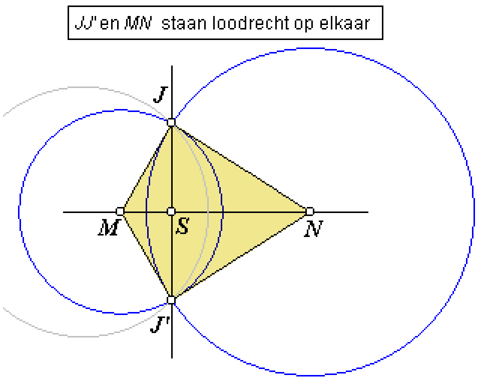
Er geldt:

Stelling 4. De middelpunten van de Apollonius-cirkels van een driehoek liggen op dezelfde rechte lijn.

Voordat we deze stelling bewijzen (in Opdracht 18b), kijken we eerst eens naar *twee* elkaar snijdende cirkels en naar een eigenschap van raaklijnen aan die cirkels.

Opdracht 18a

– Teken op een nieuw Cabri-tekenblad twee elkaar in de punten J en J' snijdende cirkels; de middelpunten daarvan zijn M en N.
De lijn MN wordt de *centraal* van de cirkels genoemd.



De lijn JJ' staat nu loodrecht op MN. Ga dat na met behulp van de Cabri-functie 'Loodrecht?' (in het *Eigenschappen*-menu; het vierde menu van rechts). [4]

- Waarom is de vierhoek $JMJ'N$ een vlieger?
- Wat weet je van de diagonalen van een vlieger?

We willen nu een (willekeurige) derde cirkel met middelpunt L tekenen die ook door de punten J en J' gaat.

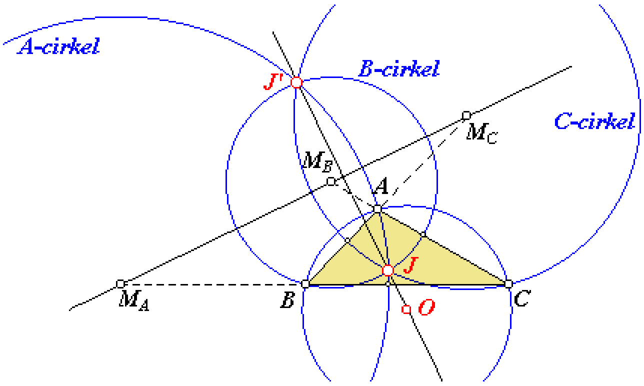
- Waarom ligt het punt L dan op de lijn MN?

De in deze opdracht bewezen eigenschap kan als volgt worden geformuleerd:

Stelling 5. Een gemeenschappelijke koorde van twee cirkels staat loodrecht op de centraal van die cirkels.

[4] In de figuur is de door Cabri gegenereerde tekst 'De objecten staan loodrecht op elkaar' door de auteur van dit werkblad gewijzigd in 'JJ' en MN staan loodrecht op elkaar'.

Opdracht 18b – bewijs van stelling 4



🖹 Bewijs nu dat de middelpunten M_A, M_B, M_C van de drie Apollonius-cirkels van driehoek *ABC* op dezelfde rechte lijn liggen.
Aanwijzing. Kijk nog eens naar Opdracht 18a.

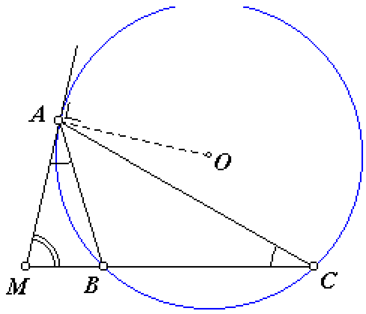
Opmerking.
De centraal van de Apollonius-cirkels van een driehoek wordt wel de *Lemoine-lijn* [5] van driehoek *ABC* genoemd.
De lijn *JJ'* heet *Brocard-lijn* of *Brocard-as* [6] van driehoek *ABC*.
[einde Opmerking]

We hebben dus bewezen:

Stelling 6. De Brocard-lijn en de Lemoine-lijn van een driehoek staan loodrecht op elkaar.

In Opdracht 20 zullen we bewijzen dat het punt *O* – het middelpunt van de omcirkel van *ABC* – (ook) op de Brocard-lijn ligt.

Opdracht 19a
We bekijken als voorbereiding op Opdracht 19c naar onderstaande figuur.



Hierin zien we de omcirkel van driehoek *ABC* (met middelpunt *O*).
Verder ligt het punt *M* zó op de lijn *BC*, dat de lijn *MA* aan de cirkel raakt (in het punt *A*).

- 🖹 Waarom is $\angle MAB = \angle C$?
- 🖹 Waarom is nu driehoek *MAB* gelijkvormig met driehoek *MCA*?
- 🖹 Toon op grond hiervan aan, dat $MA^2 = MB \cdot MC$.

We hebben dus gevonden:

Stelling 7a. Als *MA* raakt aan de omcirkel van driehoek *ABC*, dan geldt voor het punt *M* op *BC*:
$$MA^2 = MB \cdot MC$$

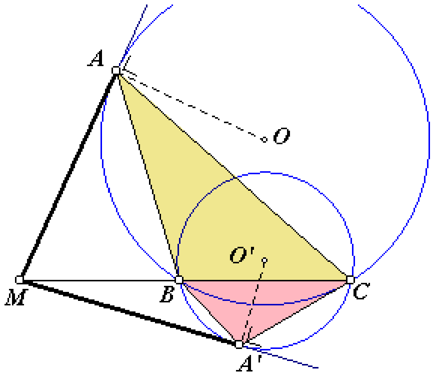
Omgekeerd geldt ook (we geven geen bewijs):

Stelling 7b. Als in driehoek *ABC* het punt *M* ligt op *BC* en als ook $MA^2 = MB \cdot MC$, dan raakt *MA* aan de omcirkel van *ABC*.

[5] Naar Emile Lemoine, 1840–1912, Frankrijk.
[6] Naar Henri Brocard, 1845-1922, Frankrijk.

Stelling 7b zullen we gebruiken in Opdracht 19b en in Opdracht 19c.

Opdracht 19b



De driehoeken *ABC* en *A'BC* hebben de zijde *BC* gemeenschappelijk.
Het punt *M* ligt op de lijn *BC*.
De lijnen *MA* en *MA'* raken aan de omcirkels van die driehoeken.

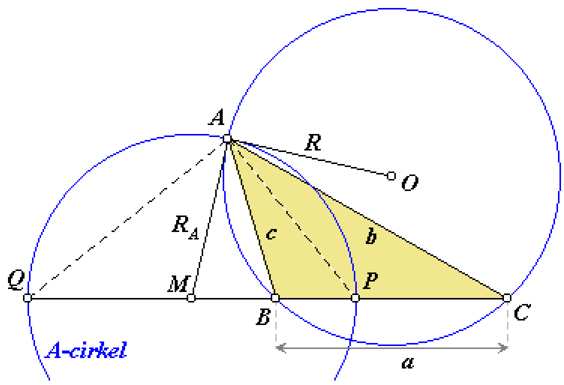
- 🖹 Bewijs nu dat *MA* = *MA'*.

De lijnstukken *MA* en *MA'* worden wel *raaklijnstukken uit M* aan beide cirkels genoemd.

- 🖹 Formuleer de hier gevonden eigenschap in de vorm van een stelling.

Opdracht 19c

We zullen in deze opdracht enkele elementaire (?) berekeningen uitvoeren die tot een – wellicht – verrassend resultaat leiden.
We gaan daarbij uit van een driehoek *ABC* waarin $b > c$ is.



In de hiernaast staande figuur is van driehoek *ABC* de *A*-Apollonius-cirkel getekend (met middelpunt *M* en straal R_A).
Deze cirkel snijdt de lijn *BC* in de punten *P* en *Q*.
We kwamen die punten al eerder tegen.

Ook is de omcirkel van driehoek *ABC* getekend (met middelpunt *O* en straal *R*).
Verder weten we van deze figuur:

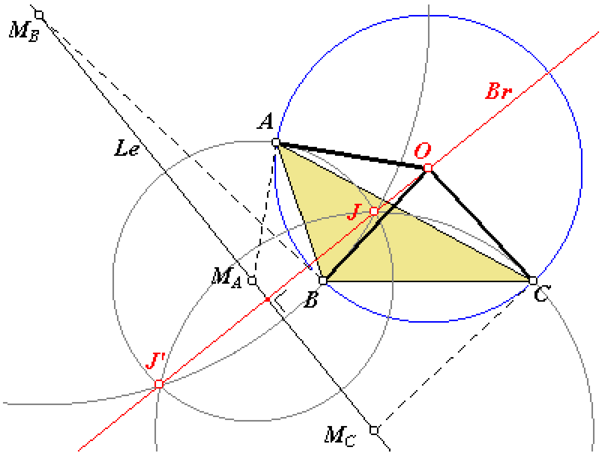
- *AP* en *AQ* zijn binnen- en buitenbissectrice van hoek *A*;
- $PB : PC = QB : QC = c : b$.

- 🖹 Maak zelf op een nieuw Cabri-tekenblad bovenstaande figuur.
  Formuleer daarna een vermoeden met betrekking tot de grootte van hoek *OAM*.
- 🖹 Toon aan dat $BP = \dfrac{ac}{b+c}$, $CP = \dfrac{ab}{b+c}$.
- 🖹 Toon (op dezelfde manier) aan dat $QB = \dfrac{ac}{b-c}$, $QC = \dfrac{ab}{b-c}$.
- – We weten dat het punt *M* het midden is van het lijnstuk *PQ*. Dus $R_A = \tfrac{1}{2}PQ = \tfrac{1}{2}(QC - PC)$.
  Ga dit na.
- 🖹 Nu is: $R_A = \dfrac{abc}{b^2 - c^2}$. Bewijs dat.
- 🖹 Toon met behulp van bovenstaande resultaten aan dat $MB \cdot MC = \dfrac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2}$.

We hebben dus gevonden dat $MA^2 = MB \cdot MC$.

- 🖹 Waarom raakt *MA* aan de omcirkel van driehoek *ABC*?

Opdracht 20



In de figuur hiernaast zijn de Apollonius-cirkels van driehoek *ABC* getekend (met middelpunten M_A, M_B, M_C).
O is het middelpunt van de omcirkel van driehoek *ABC*.

De lijn *Le* is de Lemoine-lijn van driehoek *ABC*.
De lijn *Br* is de Brochard-lijn van die driehoek.

🖹 Waarom geldt *OA* = *OB* = *OC*?
🖹 Waarom raken de lijnen *OA*, *OB*, *OC* aan de 'bijbehorende' Apollonius-cirkels?

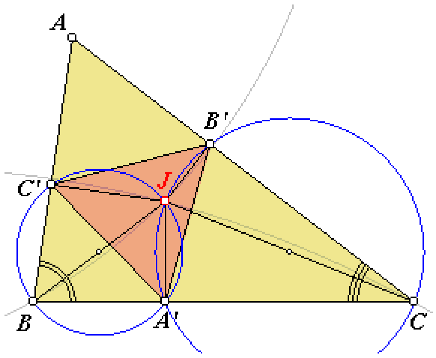
🖹 Waarom ligt het punt *O* op de Brocard-lijn van driehoek *ABC*?

We hebben nu:

Stelling 8. Het middelpunt van de omcirkel van een driehoek $\mathcal{D}$ ligt op de Brocard-lijn van $\mathcal{D}$.

En tot slot van deze paragraaf bewijzen we:

Stelling 9. De projecties van een isodynamisch punt op de zijden van een driehoek zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.



In de figuur zijn de punten *A'*, *B'*, *C'* de projecties van *J* – één van de isodynamische punten – op de zijden *BC*, *CA* en *AB* van driehoek *ABC*.
We moeten nu bewijzen dat *A'B'C'* een gelijkzijdige driehoek is.

Van het punt *J* weten we in ieder geval (uit Opdracht 17) dat de hoekpuntsmachten van *J* bij hoekpunt *B* en bij hoekpunt *C* gelijk zijn: $BJ \cdot CA = CJ \cdot AB$.

🖹 Waarom is *BJ* de middellijn van de omcirkel van driehoek *BA'C'*?
Aanwijzing. De hoeken *BA'J* en *BC'J* zijn recht.

🖹 Waarom is *CJ* de middellijn van de omcirkel van driehoek *CB'A'*?

We passen vervolgens meerdere keren de *sinusregel* [7] toe.

[7] De (uitgebreide) sinusregel in een driehoek *XYZ* luidt: $\dfrac{x}{\sin X} = \dfrac{y}{\sin Y} = \dfrac{z}{\sin Z} = 2R$, waarbij *x*, *y*, *z* de zijden en *X*, *Y*, *Z* de hoeken van die driehoek zijn en *R* de straal van de omcirkel van *XYZ*.

In driehoek *BA'C'* vinden we daarmee: $A'C' = BJ \cdot \sin B$ en in driehoek *CB'A'*: $A'B' = CJ \cdot \sin C$.

🖹 Verklaar kort hoe deze beide laatste uitdrukkingen uit de sinusregel volgen.

De straal van de omcirkel van driehoek *ABC* zij *R*. Dan is, opnieuw met de sinusregel, in driehoek *ABC*:

$$\sin B = \frac{CA}{2R} \text{ en } \sin C = \frac{AB}{2R}$$

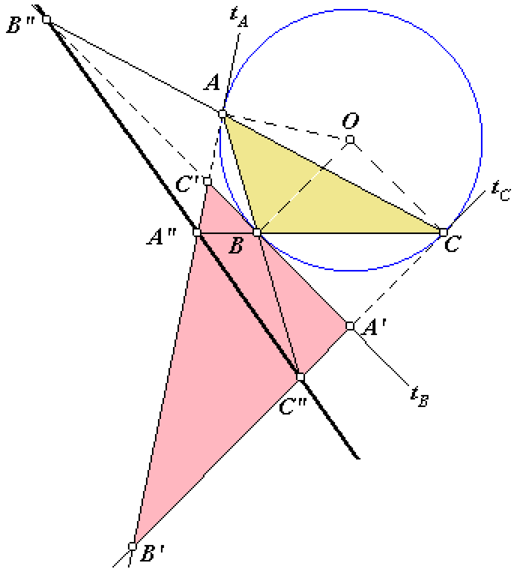
🖹 Laat nu zien dat *A'C'* = *A'B'*.
🖹 Waarom is driehoek *A'B'C'* dan inderdaad (conform stelling 9) gelijkzijdig?

11. Raaklijnendriehoek

In de laatste paragraaf van dit werkblad kijken we naar een bijzondere driehoek die samenhangt met een willekeurige driehoek, namelijk de zogenoemde *raaklijnendriehoek* van die driehoek.

Opdracht 21

Neem een leeg Cabri-tekenblad en teken daarop met de functie 'Driehoek' uit het *Lijn*-menu (derde menu van links) driehoek *ABC* (niet te groot), en teken ook de omcirkel van driehoek *ABC* (met middelpunt *O*).
Teken ook de lijnen *AB*, *BC*, *CA*, want die hebben we later nodig om snijpunten te bepalen.
Teken dan de raaklijnen t_A, t_B, t_C in *A*, *B*, *C* aan die omcirkel (teken eerst de lijnstukken *OA*, *OB*, *OC*; later kan je die lijnstukken, indien gewenst, weer verbergen).



Geef de snijpunten van die raaklijnen de volgende namen:
- *A'* is het snijpunt van *tB* en *tC*;
- *B'* is het snijpunt van *tC* en *tA*;
- *C'* is het snijpunt van *tA* en *tB*.

De drie raaklijnen vormen dus ook een driehoek: *A'B'C'* is de bedoelde **raaklijnendriehoek** van driehoek *ABC*.
En verder:
- *A"* is het snijpunt van *BC* met *B'C'*;
- *B"* is het snijpunt van *CA* met *C'A'*;
- *C"* is het snijpunt van *AB* met *A'B'*.

Teken tot slot ook de lijn door de punten *A"* en *B"*.

Als je de constructiestappen juist hebt gevolgd, krijg je een figuur als bovenstaand.

🖹 Formuleer een vermoeden omtrent de ligging van het punt *C"* en de lijn *A"B"*.
🖹 Bewijs dat de punten *A"*, *B"*, *C"* op dezelfde rechte lijn liggen.
Aanwijzing. Kijk nog eens naar Opdracht 19c, naar de Lemoine-lijn van driehoek *ABC* in Opdracht 20 en naar de punten M_A, M_B, M_C in de daarbij geplaatste figuur.

Dan is bewezen:

Stelling 10. De snijpunten van de overeenkomstige zijden van een driehoek $\mathcal{D}$ en van de raaklijnendriehoek van $\mathcal{D}$ liggen op de Lemoine-lijn van $\mathcal{D}$.

