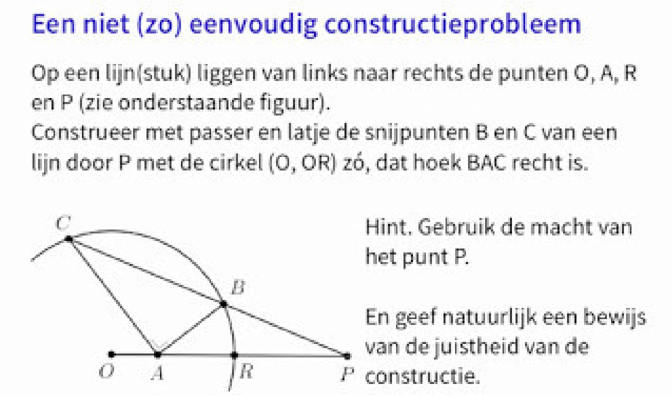
Een niet (zo) eenvoudig constructieprobleem

DAAF SPIJKER (e-mail: *spijker.daaf@gmail.com)*
Rotterdam, 30 augustus 2017

Op 21 augustus jl. plaatste ik op de pagina van de besloten Facebook-groep “Leraar wiskunde” [1] het in figuur 1 staande probleem.

figuur 1

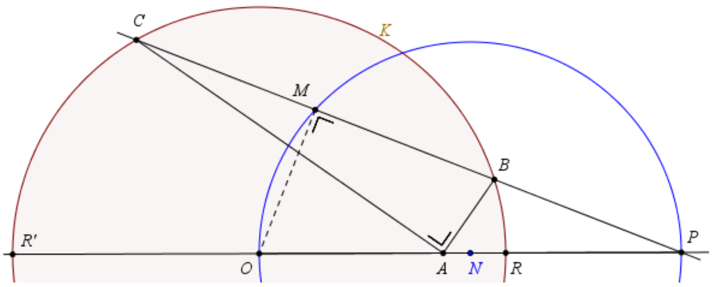


In hetgeen volgt zal ik dit probleem van een oplossing voorzien.

De cirkel met middelpunt O en straal OR zal ik daarbij verder aangeven met de naam $\mathcal{K}$.

Als de constructie is uitgevoerd – en is dit dus een aanname – is bij beschouwing van figuur 2 direct duidelijk dat het midden M van het lijnstuk BC (dat is een koorde van $\mathcal{K}$) op cirkel met middellijn OP ligt, omdat $\angle OMP = \angle OMB = 90^\circ$. Immers, de meetkundige plaats van de punten M waarvoor $\angle OMP$ een rechte hoek is, is de zogeheten *Thales-cirkel* met OP als middellijn.

figuur 2



Tja, en dan is het zaak nóg een meetkundige plaats te vinden waarop M ligt.

Als hint staat er bij de opgave: gebruik de macht van het punt P, en dat is natuurlijk niet voor niets. [2] Het eerste dat de lezer daarbij wellicht in gedachten komt, is het gebruik van $\mathcal{K}$ zelf.
Met R' als *tegenpunt* van R op $\mathcal{K}$ (het punt R' is dan naast R ook snijpunt van PO met $\mathcal{K}$) geldt voor de macht m(P) van P bij de cirkel $\mathcal{K}$:

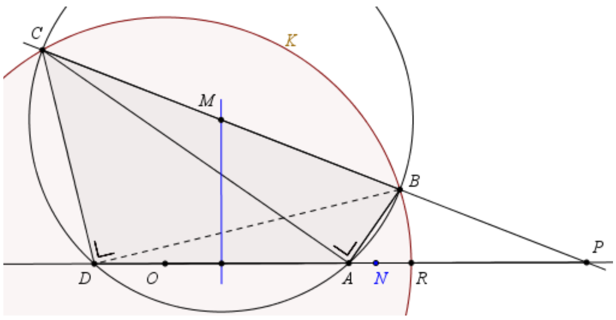
$$m(P) = PB \cdot PC = PR \cdot PR'$$

Maar dit brengt ons niet verder. Hoewel R en R' bekende punten zijn, …

Ik beschouw daarom de omcirkel van driehoek ABC, waarvan M het middelpunt is; zie figuur 3.

Nb. En dit is nog steeds in de *veronderstelling* dat hoek BAC een rechte hoek is. ◊

figuur 3



De omcirkel van driehoek ABC snijdt de lijn PO naast A ook in het punt D.
Omdat de punten B en C de snijpunten zijn van $\mathcal{K}$ en de omcirkel van ABC, geldt:

$$\mathrm{m}(P) = PB \cdot PC = PA \cdot PD$$

Vierhoek $ABCD$ is een koordenvierhoek. En belangrijk hierbij is dat de middelloodlijn van het de zijde AD van die koordenvierhoek door het punt M gaat.
De vraag is nu of het punt D te construeren is met passer en latje.

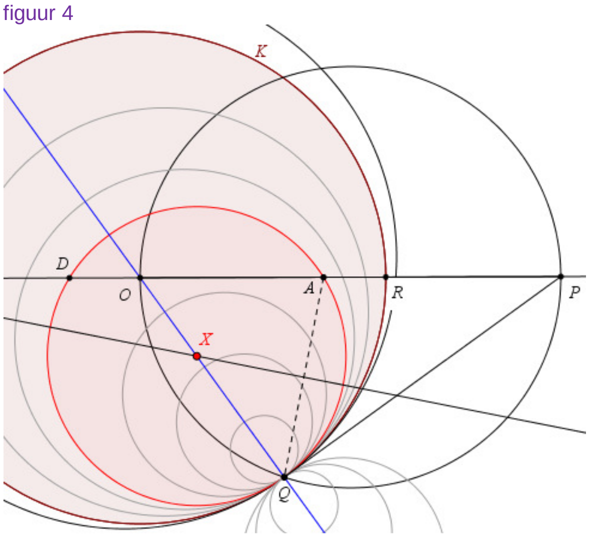
Aangezien de ligging van de punten B en C eigenlijk nog niet bekend is, ligt het voor de hand op zoek te gaan naar een *andere* cirkel door D.

Een bekende eigenschap van de macht van een punt dat buiten een cirkel ligt, is dat die macht gelijk is aan het kwadraat van de lengte van het raaklijnstuk uit dat punt aan die cirkel.
Zie nu figuur 4. In die figuur is:

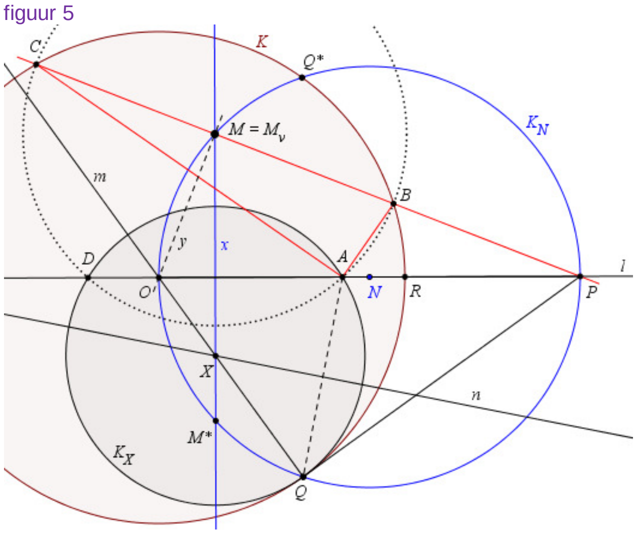
$$\mathrm{m}(P) = PQ^2 = PA \cdot PD$$

De meetkundige plaats van de middelpunten van cirkels waarbij $m(P) = PQ^2$ is de loodlijn in Q op PQ (het is de lijn door O en Q).
Eén van deze cirkels – die alle in Q aan PQ raken – gaat door A en daarmee ook door het punt D [3], dat nu, op basis van de genoemde machtseigenschap, met passer en latje geconstrueerd kan worden.

figuur 4



figuur 5



Zie verder figuur 5 voor de constructie.
We gaan bij die constructie uit van een in ligging en grootte gegeven *lijnstuk* OP waarop de punten A en R (R rechts van A) liggen, en van de cirkel $\mathcal{K}$ met middelpunt O die door R gaat.

Constructiestappen [4]

- l = Lijn(O, P)
- N = Midden(O, P)
- K_N = Cirkel(N, O)
- $\{Q, Q^*\} = \mathcal{K}$ & K_N
- PQ = Lijnstuk(P, Q)
- m = Loodlijn(Q, PQ)   \\ m gaat door O
- n = Middelloodlijn(A, Q)   ↥
- $X = m$ & n
- K_X = Cirkel(X, Q)
- $\{D, A\} = l$ & K_X
- x = Middelloodlijn(A, D)   \\ x gaat door X
- $\{M, M^*\} = x$ & K_N
- $\{B, C\} = PM$ & $\mathcal{K}$

B en *C* zijn dan de punten die geconstrueerd moesten worden.

Opmerking. De punten Q^* en M^* kunnen worden gebruikt bij de constructie van een tweede (symmetrische) oplossing van het probleem. ◊

Uit de constructie blijkt echter *niet direct* dat hoek *BAC* recht is. Een bewijs daarvan is dus op zijn plaats.

Bewijs. Omdat $PA \cdot PD = PB \cdot PC$ is vierhoek *ABCD* een koordenvierhoek.
Conform de constructie gaat de middelloodlijn van de zijde *AD* (dat is de lijn *x*) door het midden *M* van *BC*. Het middelpunt M_v van de omcirkel van *ABCD* ligt dus op de lijn *x*. Maar M_v ligt (o.a.) óók op de middelloodlijn *y* van de zijde *BC*.
Dus $M_v = x$ & y. En dan blijkt dat $M \equiv M_v$, zodat $MA = MB = MC$, waaruit volgt dat driehoek *ABC* rechthoekig is in *A*. ◊

Noten

[1] Zie (alleen indien er ingelogd is op Facebook):
https://www.facebook.com/photo.php?fbid=275346742950590&set=gm.654816674718891&type=3&theater

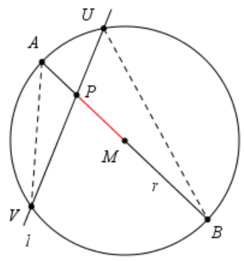
[2] *Definitie*. De macht van een punt *P* bij een cirkel $\mathcal{K}$ met middelpunt *M* en straal *r* is het reële getal $m(P) = PM^2 - r^2$.

Stelling. Snijdt een lijn *l* door een punt *P* de cirkel $\mathcal{K}$ in de punten *U* en *V* en is *AB* een middellijn van $\mathcal{K}$ die door *P* gaat, dan is voor *elke* snijlijn *l*:

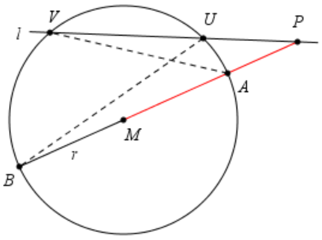
$$PA \cdot PB = PU \cdot PV = m(P)$$

Bewijs. Zie de figuren n1 en n2. De driehoeken *PAV* en *PUB* zijn namelijk gelijkvormig (*hh*) omdat ze hoek *P* gemeenschappelijk hebben en omdat ook $\angle V = \angle B = ½\text{bg}(AU)$. En uit die gelijkvormigheid volgt dan $PA : PU = PV : PB$, waaruit weer bovenstaande gelijkheid van producten volgt. ◊.
Gevolg. Voor een punt *P buiten* de cirkel geldt $PQ^2 = m(P)$. Dit blijkt direct uit de stelling van Pythagoras in driehoek *PQM*; zie figuur n3. ◊

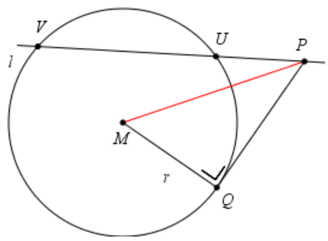
figuur n1



figuur n2



figuur n3



Ligt *P binnen* de cirkel dan is $m(P) < 0$, en dan is $m(P)$ gelijk aan het tegengestelde van het product der stukken waarin *P* een willekeurige koorde door *P* verdeelt. Ligt *P op* de cirkel dan is $m(P) = 0$. Ligt *P buiten* de cirkel dan is $m(P) > 0$, en dan is $m(P)$ gelijk aan het product der stukken waarin *P* een koorde die bij verlenging door *P* gaat, uitwendig verdeelt.

[3] Immers, $PQ^2 = PA \cdot PD$.

[4] Met Cirkel(*X*, *Y*) wordt bedoeld: de cirkel met middelpunt *X* die gaat door het punt *Y*.
Met $X = P$ & Q wordt bedoeld: *X* is het snijpunt van de meetkundige objecten *P* en *Q*; met $\{X, Y\} = P$ & Q wordt bedoeld: *X* en *Y* zijn de snijpunten van de objecten *P* en *Q*.

==========