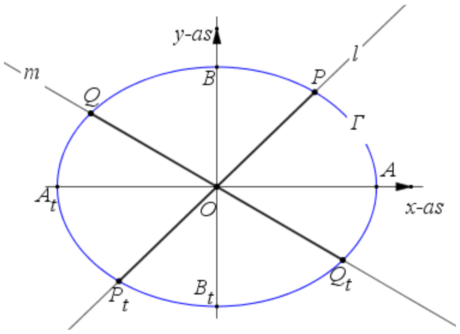
Over een eigenschap van een ellips

{{auteur}}Dick Klingens

Inleiding

figuur 1



In figuur 1 zijn in een rechthoekig xOy- assenstelsel weergegeven:

- een ellips Γ met vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;
- de lijnen l, m die beide door het middelpunt O van de ellips gaan;
- de toppen van de ellips: A, A_t, B, B_t met $OA = a$, $OB = b$;
- de snijpunten [1] van Γ met l, m: Γ & $l = \{P, P_t\}$, Γ & $m = \{Q, Q_t\}$.

De lijnstukken PP_t en QQ_t worden **middellijnen** van de ellips genoemd – analoog aan hetzelfde begrip bij de cirkel: het zijn koorden door het middelpunt. Ik val nu maar direct in huis met een definitie:

Definitie. Twee middellijnen PP_t , QQ_t van een ellips heten **toegevoegde middellijnen** als voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van die lijnen geldt:

- rico(l) · rico(m) = $-b^2/a^2$ ◊

In hetgeen volgt zal onder meer een constructie *met passer en liniaal* (met p&l) worden besproken waarmee, bij gegeven lijnstukken OP en OQ, de halve grote as OA en de halve kleine as OB van de ellips kunnen worden gevonden.
Ik merk nog op dat met de lijnstukken OP en OQ – ook wel **toegevoegde stralen** genoemd – tevens de middellijnen PP_t en QQ_t vastliggen.

Gegeven: de ellips en een punt erop

Als de ellips Γ gegeven is in een coördinatenstelsel en als het punt P op Γ ligt, dan kunnen de coördinaten van het punt Q uitgedrukt worden in die van P als OP en OQ toegevoegde stralen van Γ zijn. Er geldt namelijk:

Stelling 1. Is in een xOy-assenstelsel een ellips Γ gegeven met de vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ligt het punt $P = (p_1, p_2)$ op Γ en is Q het op Γ liggende eindpunt van de toegevoegde straal OQ van OP, dan is voor de coördinaten $(-q_1, q_2)$ van het punt Q (zie figuur 1): [2]

- $q_1 = a/b \cdot p_2$, $q_2 = b/a \cdot p_1$ ◊

Het bewijs van stelling 1 staat in de appendix bij dit artikel (in paragraaf 1).[3]

De p&l-constructie van de coördinaten van het punt Q volgt nu eenvoudig uit twee evenredigheden die gebaseerd zijn op de in stelling 1 genoemde relaties:

- $b : a = p_2 : \mathbf{q_1}$, $a : b = p_1 : \mathbf{q_2}$

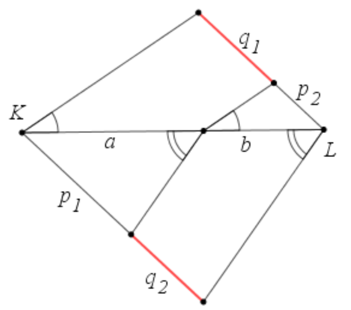
In figuur 2 is de (gebruikelijke) constructie van lijnstukken met lengtes q_1, q_2 uitgevoerd, uitgaande van een lijnstuk KL met lengte $a + b$, en lijnstukken met lengtes p_1, p_2 .

Zoals bekend is het met p&l construeren van een kegelsnede *alleen puntsgewijs* mogelijk. Voor de constructie van een punt van de ellips (in casu het punt P) kies ik een *loodrechte lijnvermenigvuldiging* [4] van de cirkel C_1 (middelpunt O) met straal a ten opzichte van de x-as met factor b/a. Zie daartoe figuur 3, waarin de lengte van de straal van de cirkel C_2 (middelpunt O) gelijk is aan b (hier met $b < a$).

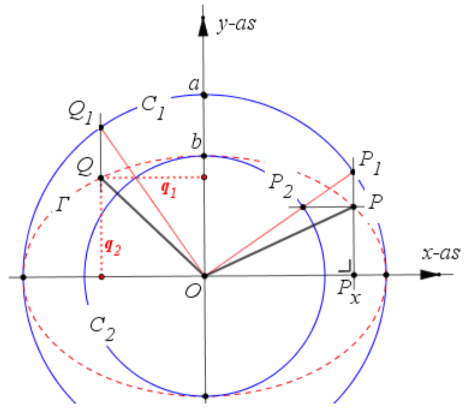
Ik zal laten zien dat bij die lijnvermenigvuldiging (het woord 'loodrechte' laat ik in hetgeen volgt maar weg) een cirkel inderdaad wordt afgebeeld op een ellips.
In de appendix (paragraaf 4) [3] toon ik aan, dat deze afbeelding (met een factor kleiner dan 1) overeenkomt met een *orthogonale projectie* van een cirkel in de 3-dimensionale euclidische ruimte op een vlak.

[2]

figuur 2



figuur 3



De vergelijking van C_1 is $x^2 + y^2 = a^2$; daarop ligt het punt P_1. Met [5] $x(P_1) = x_1$, $y(P_1) = y_1$ geldt dan:

- $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ **…(1)**

Het punt P is het beeld van P_1 bij de bedoelde lijnvermenigvuldiging. Met $x(P) = x$, $y(P) = y$ is nu:

- $$\left.\begin{array}{lll} x(P)=x(P_1) & \Rightarrow & x_1 = x \\ y(P)=b/a\cdot y(P_1) & \Rightarrow & y_1 = a/b\cdot y \end{array}\right\}\textbf{...(2)}$$

Immers, in driehoek OP_xP_1 is $P_1P_x : PP_x = P_1O : P_2O$ of $y_1 : y = a : b$.
Uit (1) en (2) volgt dan door substitutie de vergelijking van de *meetkundige plaats* van het punt P als P_1 de cirkel C_1 doorloopt:

- $x^2 + (a/b)^2 \cdot y^2 = a^2$ of $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

En dit is inderdaad de vergelijking van Γ.

Gevolg (van stelling 1). Het punt Q in figuur 3 is uiteraard ook het beeld van een punt van C_1 bij de onderhavige lijnvermenigvuldiging, namelijk van Q_1. Voor het product van de rico's van OP, OQ geldt (per definitie):

- $\text{rico}(OP) \cdot \text{rico}(OQ) = -b^2/a^2$

Nu is $\text{rico}(OP_1) = a/b \cdot \text{rico}(OP)$, $\text{rico}(OQ_1) = a/b \cdot \text{rico}(OQ)$, zodat:

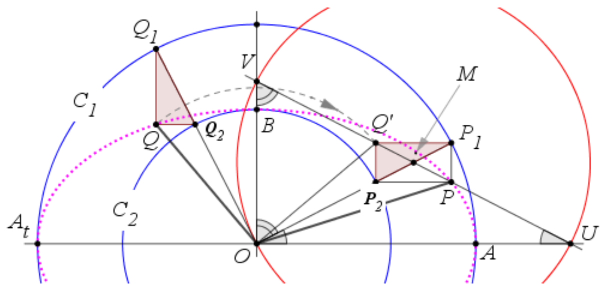
- $\text{rico}(OP_1) \cdot \text{rico}(OQ_1) = a^2/b^2 \cdot -b^2/a^2 = -1$

De lijnstukken OP_1 en OP_2 (stralen van C_1) staan dus in O loodrecht op elkaar. En, het omgekeerde is eveneens juist.

Gegeven: twee toegevoegde stralen van een ellips

Ik merk allereerst op dat het werken met coördinaten ten behoeve van een p&l-constructie, zoals in de vorige paragraaf, niet mogelijk is als *alleen* twee toegevoegde stralen van een ellips in ligging en grootte gegeven zijn.
In de nu volgende theoretische voorbehandeling (de analyse) van de constructie zal ik echter wél gebruik maken van de halve assen.

figuur 4



In figuur 4 is de straal van cirkel C_1 gelijk aan a en die van C_2 gelijk aan b. Voorts zijn er twee onderling loodrechte lijnen door O getekend: OA, OB; dit zijn de (symmetrie)assen van de ellips.

De punten P, Q van de ellips zijn de beelden van de punten P_1, Q_1 (op cirkel C_1) bij de lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de lijn OA (de drager van een middellijn van C_1).

De lijnstukken OP_1 en OP_2 zijn zo gekozen dat ze loodrecht op elkaar staan. Op grond van het gevolg van stelling 1 (zie het einde van de vorige paragraaf) zullen OP en OQ dan toegevoegde stralen van de ellips zijn.

De in Q rechthoekige driehoek QQ_1Q_2 (Q_2 op cirkel C_2) wordt geroteerd in wijzerrichting (over -90°) met O als centrum. Het beeld van die driehoek is driehoek $Q'P_1P_2$ (P_2 op cirkel C_2).

Verder is $PQ' \,\&\, OA = U$ en $PQ' \,\&\, OB = V$. Dan is vierhoek $PP_1Q'P_2$ een rechthoek waarvan de zijden twee aan twee evenwijdig zijn met de assen van de ellips. Daardoor maakt de lijn UV dezelfde hoeken met de assen van de ellips als de lijn OP_1 (beide zijn drager van een diagonaal van de rechthoek). Dan is, en zie de *gelijkbenige* trapezia $OP_2Q'V$ en $OUPP_2$:

- $OP_1 = \boldsymbol{a} = OP_2 + P_2P_1 = b + Q'P = VQ' + Q'P = \boldsymbol{VP}$
- $OP_2 = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{UP}$

Ik formuleer nu, deels op grond van wat hierboven is gevonden:

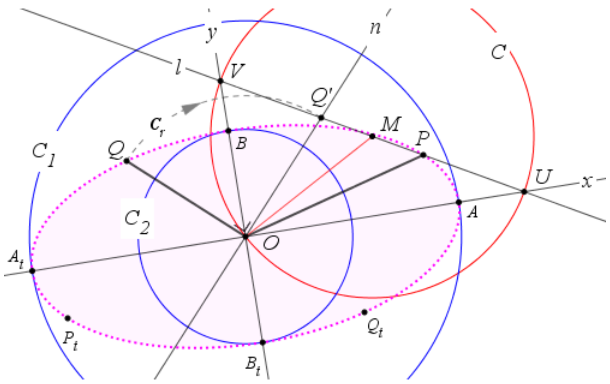
Stelling 2. Zijn OP en OQ toegevoegde stralen van een ellips (met halve assen a en b), is Q' het beeld van Q bij een rotatie om O over -90° en is M het midden van PQ', dan snijdt de lijn PQ' de cirkel met middelpunt M en straal MO in de punten U en V (zie figuur 4), waarbij $VP = a$ en $UP = b$. ◊

Bewijs. Bij een ellips is het gebruikelijk de lengte van de halve grote as aan te geven met a. Voor de punten U, V op de lijn PQ' geldt dan $VP > UP$.
Verder is $VQ' = OP_2 = UP$ (zie de genoemde trapezia), zodat het midden M van het lijnstuk PQ' ook het midden is van het lijnstuk UV. Met andere woorden: M is het middelpunt van de omcirkel van de (in O rechthoekige) driehoek OUV. ◊
Tot zover de theoretische aanloop naar de hierna volgende p&l-constructie.

Constructie van Rytz

Geheel conform stelling 2 kunnen de grote en de kleine as van een ellips met p&l worden geconstrueerd als *alleen* twee toegevoegde stralen OP en OQ gegeven zijn; zie figuur 5.

figuur 5



Constructiestappen bij de in ligging en grootte gegeven lijnstukken OP en OQ.[6]

1. Loodlijn(O, OQ) = n
2. Cirkel (O, Q) = C_r // t.b.v. de rotatie.
3. C_r & n = Q'
4. Midden(P, Q') = M
5. Lijn(P, Q') = l
6. Cirkel(M, O) = C
7. C & l = {U, V}
8. Passer(VP, O) = C_1 ; Passer(UP, O) = C_2
9. Lijn(O, U) = x ; Lijn(O, V) = y // dit zijn de assen van de ellips.
10. C_1 & x = {A, A_t} ; C_2 & y = {B, B_t} // dit zijn de toppen van de ellips.

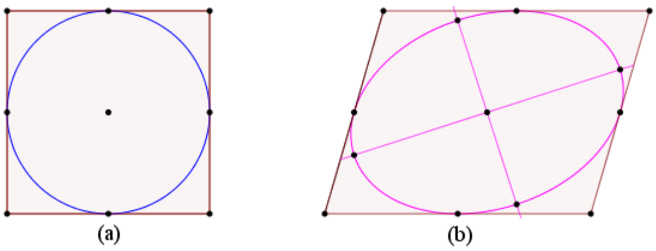
De ellips is nu bepaald door vijf van de zes (acht) punten A_1, A_2, B_1, B_2, P, Q (P_t, Q_t).

Opmerking. Deze constructie, die voor het eerst gepubliceerd is in 1845, is vernoemd naar de Zwitserse wiskundige David Rytz von Brugg (1801–1868).

Het waarom?

Het antwoord op de vraag in de kop van deze paragraaf is natuurlijk niet alleen “Vanwege de wiskunde!”

figuur 6



Het met p&l construeren van een ingeschreven cirkel in een vierkant kost minder dan een cent: construeer het midden van twee geschikte lijnstukken en je hebt het middelpunt en een raakpunt van die cirkel (zie figuur 6a).

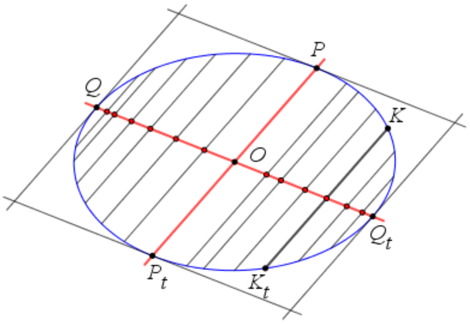
[4]

Het tekenen (want écht met p&l construeren gaat immers niet) van een ingeschreven ellips van een parallellogram (zie figuur 6b, waarin ook de assen van het parallellogram zijn weergegeven) kost echt iets meer!
Maar, een eigenschap van twee toegevoegde middellijnen van een ellips kan bij dit laatste uitkomst bieden, namelijk:

Stelling 3. De meetkundige plaats van de middens van de koorden van een ellips die evenwijdig zijn met een middellijn van die ellips, is de aan die middellijn toegevoegde middellijn; zie figuur 7. ◊

Een analytisch bewijs van deze stelling staat in de appendix (in paragraaf 2).[3]

figuur 7



In figuur 7 zijn ook de raaklijnen in de eindpunten van beide toegevoegde middellijnen *PPt* en *QQt* weergegeven. Deze zijn uiteraard (?) evenwijdig met de betreffende middellijn.[8]

Een slotopdracht. Construeer met p&l de assen van een ingeschreven ellips in een gegeven parallellogram.

Hierbij merk ik op, dat er natuurlijk méér ingeschreven ellipsen zijn dan die ene die kan worden ‘gevonden’ met de constructie van Rytz.[7]

Noten

[1] In hetgeen volgt betekent u & $v = \{X, Y\}$: de punten X en Y zijn de snijpunten van de meetkundige objecten u en v; u & $v = X$ betekent: X is een/het snijpunt van u en v.

[2] De algemene geldigheid van de stelling wordt geen geweld aangedaan door te stellen dat $p_1, p_2 > 0$ en ook $q_1, q_2 > 0$.

[3] De appendix bij dit artikel is als PDF-bestand beschikbaar via:
http://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/{{999}}klingens.pdf

[4] Een lijnvermenigvuldiging behoort de klasse van affiene afbeeldingen van het euclidische vlak op zichzelf. Zie voor een beschouwing daarvan bijvoorbeeld:
http://www.pandd.demon.nl/promeet/affien.htm#41

[5] Met $x(U)$ c.q. $y(U)$ wordt in hetgeen volgt bedoeld: de x-coördinaat van het punt U c.q. de y-coördinaat van het punt U.

[6] De functies die in de constructiestappen worden gebruikt, komen in het algemeen overeen met functies die zijn opgenomen in computer-tekenprogramma’s, zoals *GeoGebra*. Na // staat commentaar bij de constructiestap.
Zie: *https://www.geogebra.org* .

[7] In de appendix (paragraaf 5) staat een eenvoudiger methode om punten van een in een parallellogram ingeschreven ellips te construeren. Die methode is gebaseerd op een orthogonale projectie, waarvan een korte inleiding staat in paragraaf 4 van die appendix.

[8] Zie opmerking 2 bij stelling 3 in paragraaf 2 van de appendix.

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamenprogramma vanaf 2018).
E-mailadres: *dklingens@gmail.com*