Over het hoogtepunt van een driehoek

DICK KLINGENS, KRIMPEN AAN DEN IJSSEL

0. Concurrentie

De belangrijkste eigenschap van de *hoogtelijnen* in een driehoek is de volgende:

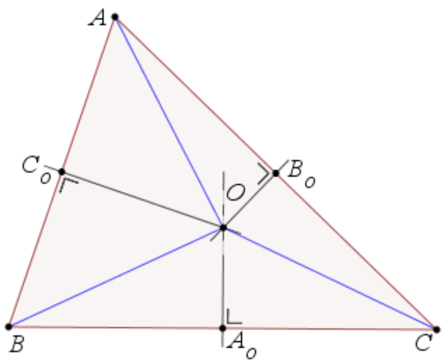
Stelling 1. De hoogtelijnen van een driehoek zijn **concurrent** (snijden elkaar in hetzelfde punt); hun snijpunt is het zogeheten **hoogtepunt** van de driehoek. ◊

Ik zal van deze eigenschap in de paragrafen hierna enkele bewijzen geven. De volgorde waarin dat gebeurt, is niet geheel willekeurig.

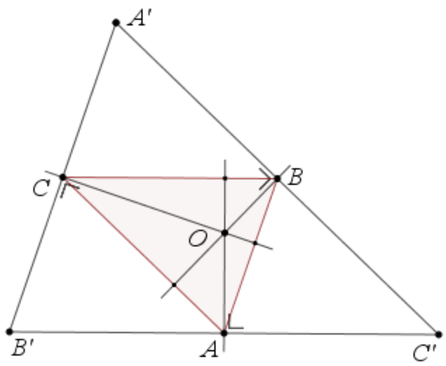
1. Via middelloodlijnen

Dat de middelloodlijnen van een driehoek concurrent zijn, is eenvoudig – heel elementair – te bewijzen; zie figuur 1a.

figuur 1a



figuur 1b



Ik maak bij het volgende bewijs dan ook *geen* gebruik van het begrip *meetkundige plaats*.

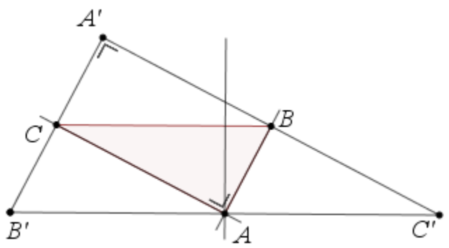
De middelloodlijnen van de zijden AB en AC van driehoek ABC (door de middens A_o en B_o van BC en CA) snijden elkaar in het punt O.
Uit de congruentie (*ZHZ*) van de paren driehoeken OAC_o, OBC_o en OAB_o, OCB_o volgt dan:
- $OA = OB$ en $OA = OC$

Met als gevolg:
- $OB = OC$

De loodlijn uit O op BC heeft het punt A_o als voetpunt. En dan zijn ook de driehoeken OBA_o, OCA_o congruent (*ZZR* c.q. *ZHH*).
Waaruit volgt dat het punt A_o het *midden* is van de zijde BC (immers $BA_o = CA_o$) en daaruit blijkt dat de loodlijn OA_o tevens de middelloodlijn van de zijde BC is.
Die middelloodlijnen hebben dus het punt O gemeenschappelijk. ◊

Zie nu figuur 1b. Een *willekeurige* driehoek ABC kan worden opgevat als de zogeheten *middendriehoek* (ook wel *centrale driehoek* of *zwaartepuntsdriehoek*) van een tweede driehoek $A'B'C'$: de middens van de zijden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ zijn opvolgend de punten A, B, C.
Daarmee is dan ook: $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ en $CA \parallel C'A'$.
Zoals eerder is aangetoond, zijn de middelloodlijnen van driehoek $A'B'C'$ concurrent in een punt O.
Deze middelloodlijnen – de lijnen AO, BO, CO – staan, vanwege de vorengenoemde evenwijdigheid, loodrecht op BC, CA, AB, en zijn daarmee *per definitie* de hoogtelijnen van driehoek ABC.
En daarmee is O het hoogtepunt van driehoek ABC. ◊

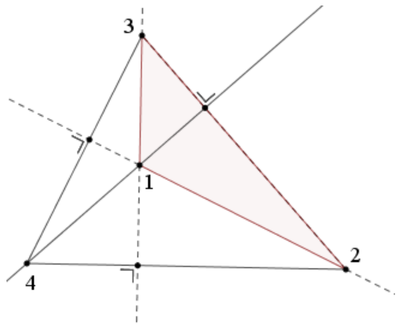
figuur 1c



Opmerkingen. **1.** Is driehoek ABC rechthoekig in A (zie figuur 1c), dan is driehoek $A'B'C'$ eveneens rechthoekig (in A'; immers $A'B' \parallel AB$ én $A'C' \parallel AC$).

De middelloodlijnen van $A'B'$ en $A'C'$ – het zijn ook de ‘dragers’ van de zijden AB en AC van driehoek ABC – zijn nu *middenparallellen* van driehoek $A'B'C'$ en hun snijpunt O valt daarmee samen met het midden van het lijnstuk $B'C'$; en dat is het punt A.
De derde middelloodlijn van driehoek $A'B'C'$ gaat daarmee ook door A. Zodat in dit geval A het hoogtepunt is van de A-rechthoekige driehoek ABC.

figuur 1d



2. Als eenmaal is aangetoond dat de hoogtelijnen concurrent zijn, dan is het in principe niet meer nodig (ook) naar stomphoekige driehoeken te kijken.

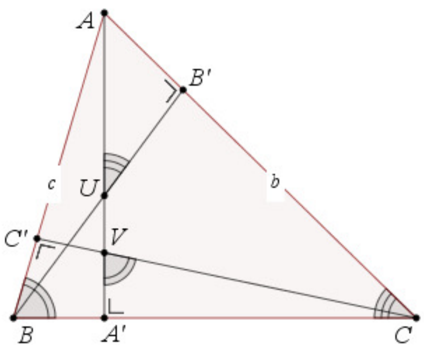
Zie figuur 1d, waarin een zogenoemd *hoogtepuntssysteem* (Eng: *orthocentric system*) is weergegeven: vier vrij gelegen punten waarvan elk punt het hoogtepunt is van de driehoek gevormd door de drie andere punten. [1] ◊

2. Met goniometrie

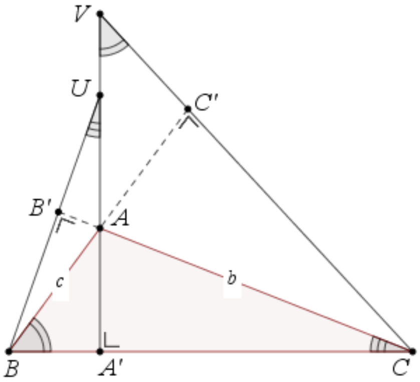
In opmerking 1 aan het einde van paragraaf 1 heb ik laten zien dat in een *rechthoekige* driehoek de hoogtelijnen elkaar in snijden in het hoekpunt met de rechte hoek. En daarbij laat ik die mogelijkheid in hetgeen volgt zoveel mogelijk voor wat het is.

2.1. Ik ga er daarom in eerste instantie van uit dat de driehoek *scherphoekig* is; zie figuur 2a.
Stel dat hoogtelijnen *niet* concurrent zijn [2]: AA' & $BB' = U$ en AA' & $CC' = V$ met vooralsnog $U \neq V$.
Ik zal evenwel aantonen dat de punten U en V samenvallen.

figuur 2a



figuur 2b



Voor de hoogtelijn AA' geldt: AA' is $h_a = c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$.
In de rechthoekige driehoeken ABB' en ACC' is:
- $AB' = c \cdot \cos A$ en $CA' = b \cdot \cos C$

In driehoek BCC' is $\angle \underline{C'CB} + \angle B = 90^\circ$. In driehoek $A'CV$ is $\angle \underline{VCA'} + \angle CVA' = 90^\circ$.
Dus is $\angle CVA' = \angle B$ en, min of meer analoog, $\angle C = \angle AUB'$.
In de driehoeken AUB' en CVA' is daarmee:

$$AU = \frac{AB'}{\sin C} = \frac{c \cdot \cos A}{\sin C} \quad \text{en} \quad A'V = \frac{CA'}{\tan B} = \frac{b \cdot \cos C}{\tan B}$$

Is nu $UV = u$, dan is:
- $AA' = AU + u + VA'$ of $u = AA' - AU - VA'$

Zodat:

$$u = AA' - c \cdot \frac{\cos A}{\sin C} - b \cdot \frac{\cos C}{\tan B}$$

In een driehoek met hoeken A, B, C is verder ook $\cos A = \cos(\pi - (B + C)) = -\cos(B + C)$, zodat daarmee:

$$u = AA' + c \cdot \frac{\cos B \cdot \cos C - \sin B \sin C}{\sin C} - b \cdot \frac{\cos C}{\tan B} = AA' + c \cdot \frac{\cos B}{\tan C} - c \cdot \sin B - b \cdot \frac{\cos C}{\tan B}$$

En dan is:

$$u = \frac{1}{\tan B \cdot \tan C}(c \cdot \sin B - b \cdot \sin C)$$

Maar $c \cdot \sin B = b \cdot \sin C = AA'$, dus $u = 0$.
Of ook:
- $AA' = AV + VA'$

Zodat de punten U en V samenvallen: stelling 1 is juist in een scherphoekige driehoek.

2.2. Stel nu dat driehoek ABC *stomphoekig* is in A; zie figuur 2b (zie eventueel ook opmerking 2 aan het einde van paragraaf 1).
Ongeveer op dezelfde manier als in onderdeel 1 is nu:
- $\angle AUB' = \angle C$ en $\angle CVA' = \angle B$

Dan is ook in driehoek $AA'B$ resp. $AA'C$: $A'B = c \cdot \cos B$ en $A'C = b \cdot \cos C$.
In driehoek $A'BU$ is: $\tan C = \dfrac{A'B}{A'U}$, zodat $A'U = c \cdot \dfrac{\cos B}{\tan C}$.
En in driehoek $A'CV$ is: $\tan B = \dfrac{A'C}{A'V}$, zodat $A'V = b \cdot \dfrac{\cos C}{\tan B}$.
Is nu $u = A'V - A'U$, dan is:

$$u = b \cdot \frac{\cos C}{\tan B} - c \cdot \frac{\cos B}{\tan C} = \frac{1}{\tan B \cdot \tan C}(b \cdot \sin C - c \cdot \sin B)$$

En met $AA' = b \cdot \sin C = c \cdot \sin B$ is eveneens $u = 0$.
Conclusie: stelling 1 is juist in een stomphoekige driehoek. ◊

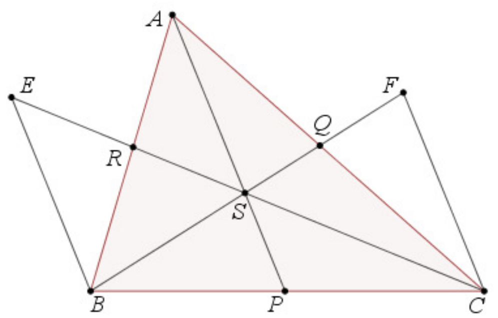
3. Met de stelling van Ceva

Ik geef eerst een definitie voor het begrip *deelverhouding* met behulp waarvan een te bewijzen stelling zal worden geformuleerd.

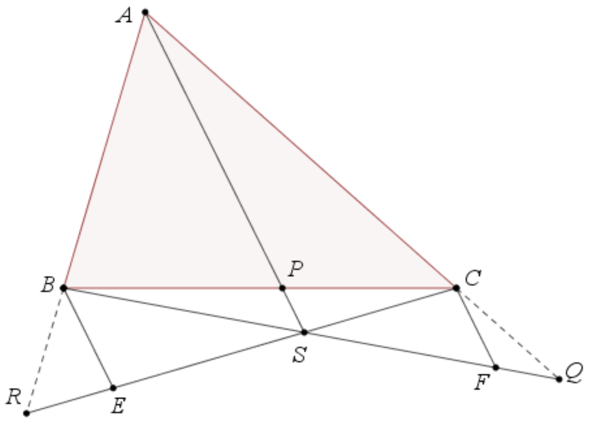
Definitie. Onder de door een punt P bepaalde *deelverhouding* (ABP) op een lijnstuk AB wordt verstaan de van teken voorziene verhouding PA/PB.
'Van teken voorzien' wil hierbij zeggen dat $(ABP) < 0$ is als P op het lijnstuk AB ligt, en dat $(ABP) > 0$ als P op een der verlengden van AB ligt. ◊

Opmerking. Als $P \equiv A$, dan is $(ABP) = 0$; als $P \equiv B$, dan heeft (ABP) geen waarde.
Als $(ABP) = 1$, dan noemen we P het *oneigenlijk punt* van de lijn AB. ◊

figuur 3a



figuur 3b



Stelling 2 (stelling van Ceva). Zie figuur 3a,b. De lijnen AP, BQ, CR met P op BC, Q op CA, R op AB gaan door hetzelfde punt S *desda* $(BCP)(CAQ)(ABR) = -1$. ◊

Bewijs. ($\rightarrow$) Ik geef het bewijs in het geval dat S binnen de driehoek ligt (zie figuur 3a).
Met E op CS en $BE \,//\, AS$ en met F op BS en $CF \,//\, AS$ is op basis van de *eerste stelling van Thales* (verhoudingen):
- $AR : RB = AS : BE$
- $BP : BC = PS : CF$

- $BC : PC = BE : PS$
- $CQ : QA = CF : AS$

Vermenigvuldiging van de linker- en rechterleden van deze verhoudingen geeft na herleiding en ordening:

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

Herschrijven met deelverhoudingen geeft dan $(ABR)(BCP)(CAQ) = -1$.

Opmerking. Zie [3] voor een bewijs van dit deel van de stelling met gebruik van oppervlaktes. ◊

In een configuratie waarbij het punt S buiten de driehoek ligt is het bewijs precies hetzelfde.

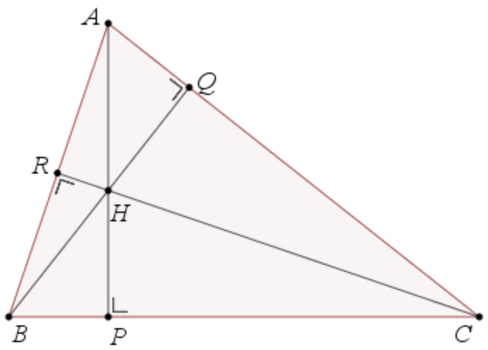
(←) Als wordt uitgegaan van $(BCP)(CAQ)(ABR) = -1$, dan moet worden aangetoond dat de drie lijnen AP, BQ, CR door hetzelfde punt gaan.
Stel dat BQ en CR elkaar snijden in het punt S én dat de lijn AS *niet* door P gaat, maar dat BC & $AS = P'$.
Volgend de reeds bewezen ‘Ceva-eigenschap’ is dan:

- $(BCP')(CAQ)(ABR) = -1$

Samen met het gegeven moet dan gelden dat $(BCP') = (BCP)$. Waaruit direct blijkt dat $P \equiv P'$. ◊

En met dit resultaat kijk ik in figuur 4a, eerst met een beetje gonio, weer naar de hoogtelijnen in een driehoek, en naar een zestal rechthoekige deeldriehoeken.

figuur 4a



In driehoek ARC is $AR = b \cdot \cos \alpha$.
In driehoek BRC is $BR = a \cdot \cos \beta$.
In driehoek BPA is $BP = c \cdot \cos \beta$.
In driehoek CPA is $CP = b \cdot \cos \gamma$.
In driehoek CQB is $CQ = a \cdot \cos \gamma$.
In driehoek AQB is $AQ = c \cdot \cos \alpha$.

Dan is:

$$(ABR)(BCP)(CAQ) = -\frac{b \cdot \cos\alpha}{a \cdot \cos\beta} \cdot \frac{c \cdot \cos\beta}{b \cdot \cos\gamma} \cdot \frac{a \cdot \cos\gamma}{c \cdot \cos\alpha} = -1$$

Op grond van de stelling van Ceva gaan de lijnen AP, BQ en CR door eenzelfde punt H, het hoogtepunt van de driehoek. ◊

Het bewijs kan evenwel ook *zonder* gonio worden geleverd.
De driehoeken ARC en AQB zijn namelijk gelijkvormig (*hh*). Daaruit volgt dat:

- $AR : AQ = AC : AB = b : c$

Evenzo is:

- $BP : BR = c : a$ en $CQ : CP = a : b$

En dan is

$$(ABR)(BCP)(CAQ) = -\frac{RA}{RB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} = \text{(na herschikking van de noemers)} -\frac{RA}{QA} \cdot \frac{PB}{RB} \cdot \frac{QC}{PC}$$
$$= -\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = -1$$

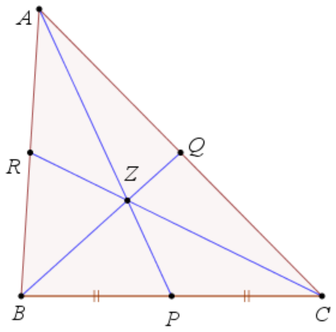
En dit moest worden aangetoond. ◊

Opmerking. Met de stelling van Ceva kan eveneens worden bewezen dat:

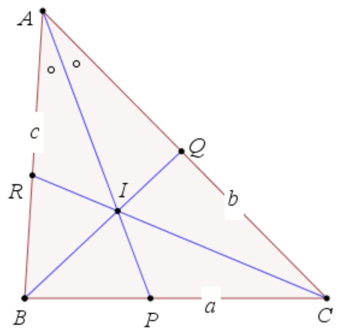
- de zwaartelijnen van een driehoek concurrent zijn (zwaartepunt Z);
- de bissectrices van de hoeken van een driehoek concurrent zijn (incentrum I).

Ik laat die bewijzen hieronder volgen.

figuur 4b



figuur 4c



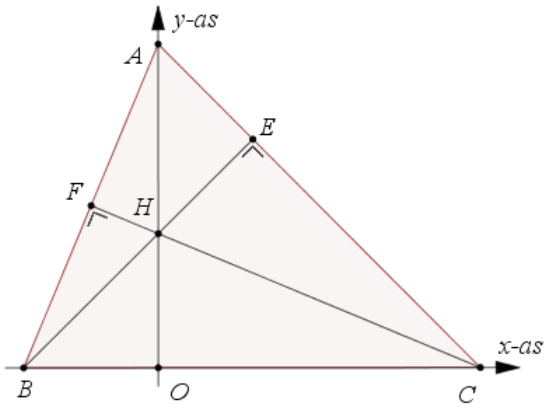
Zwaartelijnen (zie figuur 4b) – Direct is duidelijk dat:
$(ABR)(BCP)(CAQ) = (\text{-}1)(\text{-}1)(\text{-}1) = \text{-}1$
Bissectrices (zie figuur 4c) – Ik gebruik drie keer de bissectricestelling:
$(ABR)(BCP)(CAQ) = (\text{-}\frac{b}{a})(\text{-}\frac{c}{b})(\text{-}\frac{a}{c}) = \text{-}1$

N.B. De concurrentie van de middelloodlijnen van de zijden van een driehoek, kan *niet* met de stelling van Ceva worden bewezen. ◊

4. Met coördinaten

Ik breng een orthonormaal assenstelsel xOy aan in het vlak van de gegeven driehoek ABC, en wel zo dat de x-as de drager is van de zijde BC en de y-as samenvalt met de hoogtelijn uit A op BC; zie figuur 5.

figuur 5



Met $B = (b, 0)$ en $C = (c, 0)$ samen met $A = (0, a)$ geldt nu voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van de zijden AB en AC:

- rico(AC) = $\frac{a}{\text{-}c}$
- rico(AB) = $\frac{a}{\text{-}b}$

De hoogtelijnen BE en CF hebben dan als vergelijking:
$BE :: \; y = \frac{c}{a}(x-b)$
$CF :: \; y = \frac{b}{a}(x-c)$

Het snijpunt van deze lijnen met de y-as (de A-hoogtelijn) is dan:
bij BE: $y = \frac{c}{a}(0-b) = \text{-}\frac{bc}{a}$
bij CF: $y = \frac{b}{a}(0-c) = \text{-}\frac{bc}{a}$
De hoogtelijnen van driehoek ABC snijden elkaar dus in het punt $H = (0, \text{-}\frac{bc}{a})$. ◊

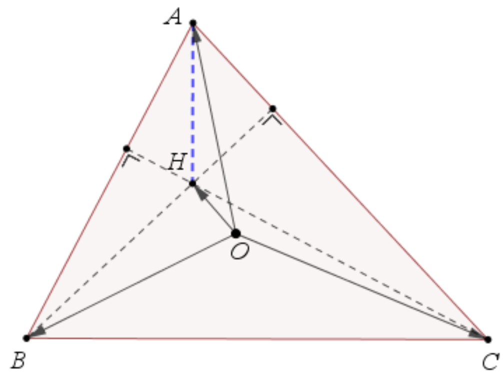
Opmerking. Is $\angle A = 90°$, dan is rico(AC) · rico(AB) = -1, zodat $a^2 = \text{-}bc$.
Daarmee is $H = (0, \text{-}\frac{bc}{a}) = (0, \frac{a^2}{a}) = (0, a)$.
Bij een A-rechthoekige driehoek ABC valt het hoogtepunt dus samen met het hoekpunt A. ◊

5. Met vectoren en complexe getallen

5.1. Ik kies in het vlak van de driehoek het punt O zó dat $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \mathbf{O}$; zie figuur 6a.
Nu gelden bij de hoogtelijnen uit B en C de volgende inproducten [4]:

$$(\overline{OH} - \overline{OB}) \cdot (\overline{OC} - \overline{OA}) = 0$$
$$(\overline{OH} - \overline{OC}) \cdot (\overline{OB} - \overline{OA}) = 0$$

figuur 6a



Uitwerking van beide en vervolgens aftrekking van de onderste uitdrukking van de bovenste levert:

$$0 = \overline{OH}\cdot\overline{OC} - \overline{OH}\cdot\overline{OB} + \overline{OA}\cdot\overline{OB} - \overline{OA}\cdot\overline{OC}$$

Na samennemen is:

$$0 = \overline{OH}\cdot(\overline{OC}-\overline{OB}) - \overline{OA}\cdot(\overline{OC}-\overline{OB}) =$$
$$= (\overline{OH}-\overline{OA})\cdot(\overline{OC}-\overline{OB})$$

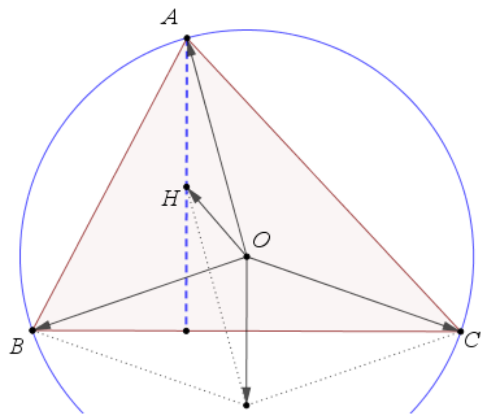
En hieruit blijkt dat de lijn *AH* loodrecht staat op de lijn *BC*.
Met andere woorden: stelling 1 is juist. ◊

5.2. Bij een iets andere methode (zie figuur 6b) ga ik uit van het punt *O* dat het middelpunt is van de omcirkel (straal *r*) van driehoek *ABC* én van het punt *H* waarvoor geldt:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

Ik zal nu bewijzen dat de lijn *AH* loodrecht staat op de lijn *BC*.

figuur 6b



Met $\overline{AH} = -\overline{OA} + \overline{OH}$ en $\overline{BC} = -\overline{OB} + \overline{OC}$ is:

$$\overline{AH}\cdot\overline{BC} = (-\overline{OA} + (\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}))\cdot(\overline{OC}-\overline{OB}) =$$
$$= (\overline{OC}+\overline{OB})(\overline{OC}-\overline{OB}) =$$
$$= \overline{OC}\cdot\overline{OC} - \overline{OB}\cdot\overline{OB} = \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2$$

Hierin is $\overline{OC}^2 = |OC|^2 = r^2$ en $\overline{OB}^2 = |OB|^2 = r^2$ zodat:

$$\overline{AH}\cdot\overline{BC} = 0$$

Met andere woorden: het lijnenpaar *AH*, *BC* staat loodrecht op elkaar.
Analoog kan die eigenschap bewezen worden voor de lijnenparen *BH*, *CA* en *CH*, *AB*. ◊

5.3. Opnieuw, maar weer anders. Ik vat nu de punten van het euclidische vlak op als representanten van *complexe getallen*. Het punt *O* is de representant van het getal 0. De punten *A*, *B*, *C* representeren de complexe getallen *a*, *b*, *c* en liggen op een cirkel met middelpunt *O* (zie eventueel figuur 6b).
Stel nu dat $h = a + b + c$ (zie ook 5.2) met representant *H*. Dan is $h - a = b + c$.
Nu is [5]:

$$\frac{h-a}{b-c} = \frac{(b+c)(b-c)^t}{(b-c)(b-c)^t} = \frac{(b+c)(b^t-c^t)}{|b-c|^2} = \frac{bb^t+cb^t-bc^t-cc^t}{|b-c|^2}$$
$$= \frac{|b|^2-|c|^2+cb^t-bc^t}{|b-c|^2} = \frac{cb^t-bc^t}{|b-c|^2}$$

Is nu $u = cb^t - bc^t$ het complexe getal in de teller van het rechterlid van de laatste uitdrukking, dan is:
$-u^t = -(cb^t - bc^t)^t = -(c^tb - b^tc) = cb^t - c^tb = u$
En dit houdt in dat het complexe getal *u* zuiver imaginair is (nagaan!).
Omdat $|b-c|^2$ een reëel getal is, is er een reëel getal r ($\neq 0$) waarvoor:

$$\frac{h-a}{b-c} = r\cdot i \quad \text{of} \quad h-a = r(b-c)\cdot i$$

Met andere woorden: de lijn *HA* staat loodrecht op de lijn *BC*. (Enzovoort.) ◊

Gevolg. Het punt *Z* dat de representant is van het complexe getal $z = \frac{1}{3}(a+b+c)$, en daarmee het zwaartepunt van driehoek *ABC*, ligt op de lijn *HO* en wel zo, dat $HZ : ZO = 2 : 1$.
De lijn *HO* is de zogenoemde *Euler-lijn* van driehoek *ABC*.
Zie ook paragraaf 7.2, figuur 9b. ◊

6. Met isogonalen

Het begrip ‘isogonaal’ bij een driehoek behoort zeker niet tot de basisstof in het voortgezet onderwijs. Voor een wat uitvoeriger behandeling daarvan verwijst ik daarom naar [6].

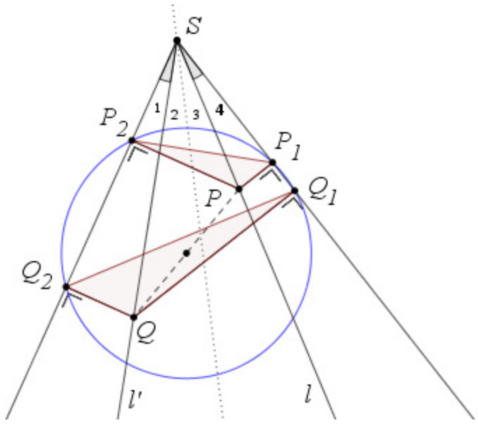
Een isogonaal l' van een lijn l door een hoekpunt van een (drie)hoek is het spiegelbeeld van l in de bissectrice van de betreffende hoek; l' heet de *isogonaal-verwante* (*lijn*) van l.
De lijnen l en l' behoren tot de ‘familie’ der *cevianen*: een *ceviaan* van een driehoek is een lijn(stuk) door een hoekpunt van die driehoek en een punt van (een verlengde van) de overstaande zijde.

Voor isogonaal-verwante lijnen bestaat de volgende eigenschap:

Stelling 3a. Voor het (willekeurige) punt P op een lijn l door het hoekpunt S van een hoek en het (willekeurige) punt Q op de isogonaal l' van l zijn de afstanden tot de benen van die hoek *omgekeerd evenredig*. ◊

Om te beginnen zal ik stelling 3a bewijzen.

figuur 7a



Bewijs. Zie figuur 7a. De lijnen l, l' zijn isogonaal-verwante lijnen bij de hoek S. De loodrechte projecties van P zijn P_1 en P_2, die van Q zijn Q_1 en Q_2.
Er moet nu worden aangetoond dat:
- $PP_1 : PP_2 = QQ_2 : QQ_1$.

De hoeken S_1 (tussen l' en SP_2) en S_4 (tussen l en SP_1) zijn vanwege de isogonaliteit aan elkaar gelijk.

Uit de paren gelijkvormige driehoeken SPP_1, SQQ_2 (*hh*) en SPP_2, SQQ_1 (*hh*) volgt nu:
- $PP_1 : QQ_2 = \underline{SP_1} : \underline{SQ_2} = SP : SQ =$ (in het andere paar) $\underline{SP_2} : \underline{SQ_1} = PP_2 : QQ_1$ **…(*)**

En hieruit blijkt door verwisseling van de ‘binnentermen’ in het eerste en laatste lid dat inderdaad:
- $PP_1 : PP_2 = QQ_2 : QQ_1$ ◊

Ook de omgekeerde stelling van stelling 3a is juist.

Stelling 3b. Als de afstanden van twee punten P en Q tot de benen van een hoek S *omgekeerd evenredig* zijn, dan liggen die punten op twee isogonaal-verwante lijnen. ◊

Bewijs. Zie ook weer figuur 7a. Ik ga nu uit van:
- $PP_1 : PP_2 = QQ_2 : QQ_1$

Daarbij zijn de vierhoeken PP_1SP_2 en QQ_1SQ_2 koordenvierhoeken, zodat $\angle P_1PP_2 = \angle Q_1QQ_2$ (beide zijn het supplement van hoek S).
En dan zijn de driehoeken PP_1P_2 en QQ_2Q_1 gelijkvormig (*zhz*), waaruit dan weer volgt dat:
- $\angle PP_2P_1 = \angle QQ_1Q_2$

In de koordenvierhoeken PP_1SP_2 en QQ_1SQ_2 is nu:
- $\angle PP_2P_1 = \angle S_4$ en $\angle QQ_1Q_2 = \angle S_1$

Dus is $\angle S_1 = \angle S_4$, zodat de lijnen l en l' isogonaal-verwant zijn. ◊

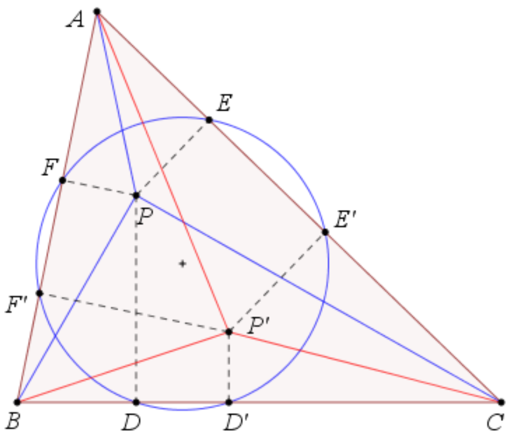
Gevolgen. **1.** Ook de punten P_1, P_2, Q_1, Q_2 zijn concyclisch. Immers, uit de onderstreepte elementen in de gedurige evenredigheid **(*)** volgt:
- $SP_1 \cdot SQ_1 = SP_2 \cdot SQ_2$

En dit is een voldoende voorwaarde voor het concyclisch zijn van de projecties van P en Q op de benen van hoek S.
2. Het middelpunt van de cirkel door de vier projecties is het midden van het lijnstuk PQ. Immers, het middelpunt van die cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de lijnstukken P_1Q_1 en P_2Q_2 en dat snijpunt ligt op de gemeenschappelijke zijde PQ van de rechthoekige trapezia PP_1Q_1Q en PP_2Q_2Q (middenparallellen). ◊

En de volgende belangrijke stelling, waar het nog steeds isogonalen betreft, kan nu bewezen worden.

Stelling 4. De isogonaal-verwante lijnen van drie concurrente cevianen van een driehoek (door elk hoekpunt gaat één ceviaan) zijn concurrent. ◊

figuur 7b



Bewijs. De cevianen door A, B, C snijden elkaar in P. De isogonaal-verwante van BP en die van CP snijden elkaar in P'.
Nu geldt volgens stelling 3a voor de afstanden van P en P' tot de benen van de betreffende hoeken:
- $PF : PD = P'D' : P'F'$ en $PD : PE = P'E' : P'D'$

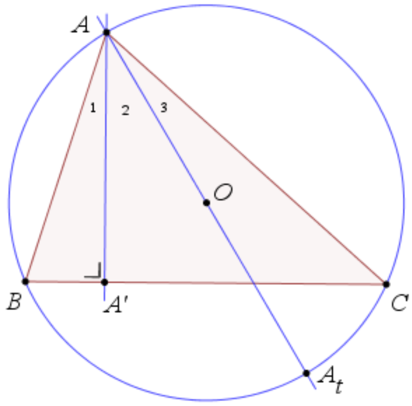
Vermenigvuldiging van de rechter- en linkerleden van de uitdrukkingen geeft dan:
- $PF : PE = P'E' : P'F'$

En daarmee zijn de lijnen AP en AP' isogonaal-verwante lijnen. Waarmee stelling 4 bewezen is. ◊

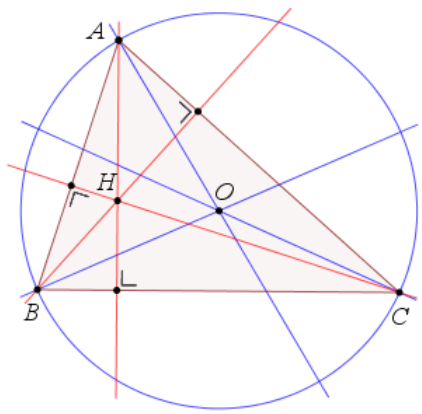
Opmerking. De punten P en P' worden in dit verband wel *isogonaal-verwante punten* of *isogonaalpunten* van de driehoek genoemd. ◊

Stelling 5. De middellijn van de omcirkel van een driehoek door een hoekpunt van die driehoek en de hoogtelijn door dat hoekpunt zijn isogonaal-verwant. ◊

figuur 8a



figuur 8b



Bewijs. Zie figuur 8a, waarin:
- AA' is de hoogtelijn op BC;
- AA_t is de door A gaande middellijn van de omcirkel;
- $\angle A_1 = \angle A'AB$;
- $\angle A_3 = \angle CAA_t$.

Wil AA' de isogonaal-verwante zijn van AA_t, dan moet bewezen worden dat $\angle A_1 = \angle A_3$.

Nu is in driehoek ABA':
- $\angle A_1 = 90^\circ - \angle B$

Verder is ook:
- $\angle A_3 = \frac{1}{2}\text{bg}(A_tC) = \frac{1}{2}(\text{bg}(ACA_t) - \text{bg}(AC)) = \frac{1}{2}\text{bg}(ACA_t) - \frac{1}{2}\text{bg}(AC) = 90^\circ - \angle B$

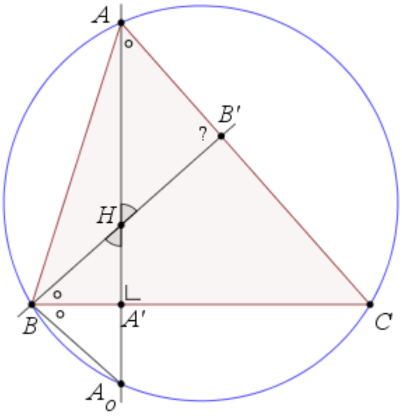
En daarmee zijn AA' en AA_t isogonaal-verwante lijnen.
Uiteraard geldt dit ook voor de hoogtelijn en middellijn door B en voor de hoogtelijn en middellijn door C. ◊

Gevolg. Zie figuur 8b. Omdat de middellijnen door A, B, C in het punt O concurrent zijn, zijn op grond van stelling 5 en stelling 4 ook de isogonaal-verwante lijnen van die middellijnen – en dat zijn de hoogtelijnen van driehoek ABC – concurrent in het punt H.
En verder: de punten O en H zijn isogonaalpunten van de driehoek. ◊

7. Met een afbeelding

7.1. Puntspiegeling

figuur 9a



Is dit het eenvoudigste bewijs? In de figuur is de omcirkel van driehoek ABC getekend en de hoogtelijn AA' die de omcirkel (ook) snijdt in A_o.
Het punt A_o heb ik vervolgens gespiegeld in A' (c.q. in BC); het beeldpunt noem ik H.
Natuurlijk wil ik aantonen dat H het hoogtepunt is van driehoek ABC.
Daartoe teken ik de lijn BH die CA snijdt in B'; hoek $AB'B$ zou dan gelijk aan 90° moeten zijn.

Nu is $\angle A_oBC = \frac{1}{2}\text{bg}(A_oC) = \angle A_oAC$.

Verder is driehoek HBA_o gelijkbenig met top B omdat BA' hoogte- én zwaartelijn is in die driehoek, en daarmee ook bissectrice.
De driehoeken $BA'H$ en $AB'H$ hebben twee gelijke, gemeenschappelijke hoeken, zodat ook voor de derde hoek in die driehoeken geldt:

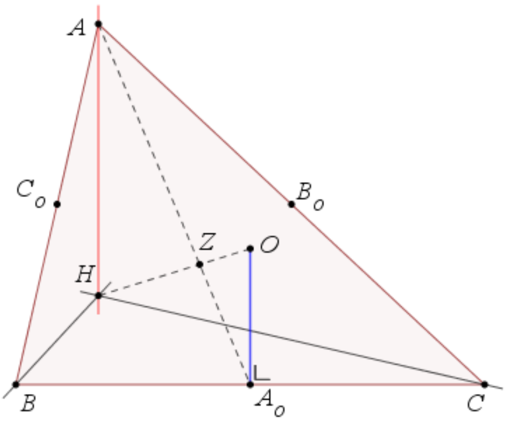
- $\angle A' = 90° = \angle B'$

En zo kan je ook bewijzen dat de lijn CH hoogtelijn is van de driehoek.
Conclusie: stelling 1 is juist.

7.2. Draaivermenigvuldiging

Ik ga uit van een driehoek ABC, samen met de punten O en Z, opvolgend het middelpunt van de omcirkel en het zwaartepunt; zie figuur 9b.

figuur 9b



Met het punt Z als centrum pas ik nu een draaivermenigvuldiging $\mathcal{D}$ toe: de rotatiehoek is 180° en de vermenigvuldigingsfactor is 2.
Het beeld $\mathcal{D}(O)$ van het punt O geef ik de naam H.
Ik zal aantonen dat H het hoogtepunt is van de driehoek.

Het punt A_o is het midden van de zijde BC van de driehoek. Nu is [7]:

- $\mathcal{D}(A_o) = A$

Zodat:

- $\mathcal{D}(OA_o) = HA$

Dit houdt in dat de lijnen OA_o en HA evenwijdig zijn, omdat ze elkaars beeld zijn bij de afbeelding $\mathcal{D}$.
En omdat OA_o loodrecht staat op BC, staat ook AH loodrecht op BC. De lijn AH is dus de A-hoogtelijn van de driehoek.
Met eenzelfde redenering (bij het midden B_o van CA en bij het midden C_o van AB) kan worden bewezen dat ook de lijnen BH en CH hoogtelijnen zijn.
En ook nu: stelling 1 is juist. ◊

Opmerkingen. **1.** Hiermee is tevens bewezen dat de afstand van het punt O tot de zijde van een driehoek gelijk is aan de helft van het 'bovenste hoogtelijnstuk' van de hoogtelijn op die zijde: $OA_o = \frac{1}{2}AH$.

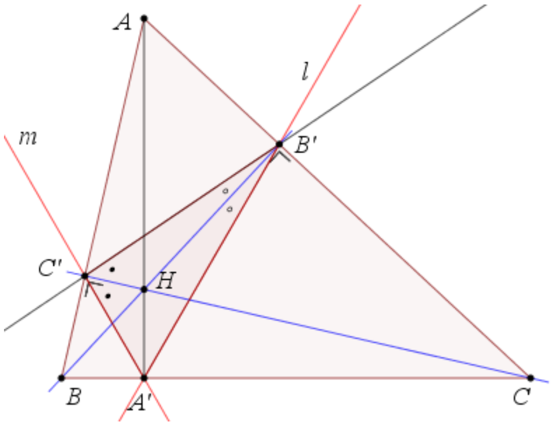
2. Zoals ik reeds schreef (in het gevolg van paragraaf 5.3) is de lijn HO de Euler-lijn van de driehoek. ◊

8. Met bissectrices

Ik ga er vanzelfsprekend van uit dat bekend is dat de bissectrices van de hoeken van een driehoek elkaar in hetzelfde punt (het middelpunt van de incirkel) snijden (zie de opmerking aan het einde van paragraaf 3).

In figuur 10a zijn BB', CC' hoogtelijnen met snijpunt H.
Ik spiegel de lijn $B'C'$ in opvolgend BB' en CC'. De beelden zijn de lijnen l en m, waarbij l & $m = A'$.

figuur 10a



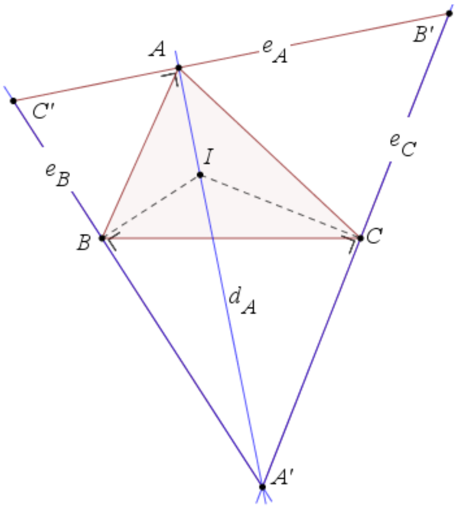
De lijnen BB' en CC' zijn nu ook bissectrices van driehoek $A'B'C'$. De lijn $A'H$ is dus eveneens een bissectrice van die driehoek.

De lijnen BA en CA zijn buitenbissectrices van de hoeken C' en B' van driehoek $A'B'C'$; hun snijpunt is het punt A.
(*) Omdat $A'H$ binnenbissectrice is van driehoek $A'B'C'$, gaat $A'H$ eveneens door het punt A.

De punten B en C kunnen beide worden opgevat als snijpunt van een binnen- en een buitenbissectrice:
$B = B'H$ & $C'A$, $C = C'H$ & $B'A$.
De verbindingslijn van de punten B en C, kijkend naar driehoek $A'B'C'$, is daarmee buitenbissectrice van hoek A' en deze lijn staat in A' dus loodrecht op AA' (de binnenbissectrice).
Het snijpunt H van de bissectrices van driehoek $A'B'C'$ is daarmee inderdaad het hoogtepunt van driehoek ABC.

Opmerkingen. **1.** Dit bewijs is voor het eerst gepubliceerd in 1835 door Christoph Gudermann (1798-1852, Duitsland).
2. De bewering in de zin die in het bewijs aangegeven is met **(*)**, behoeft wellicht een bewijs.
De bedoelde eigenschap luidt: *De buitenbissectrices van twee hoeken van een driehoek en de binnenbissectrice van de derde hoek zijn concurrent.*

figuur 10b



Bewijs. In figuur 10b zijn e_B en e_C buitenbissectrices van de hoeken B en C van driehoek ABC; $A' = e_B$ & e_C.
De lijn d_A is de binnenbissectrice van hoek A.

Voor de punten X op e_B geldt [8]: $\mathrm{d}(X, BA) = \mathrm{d}(X, BC)$.
Voor de punten X op e_C geldt: $\mathrm{d}(X, CA) = \mathrm{d}(X, CB)$.
Zodat voor het snijpunt A' van e_B en e_C geldt:
- $\mathrm{d}(A', BA) = d(A', CA)$

En dit houdt in dat het punt A' op de lijn d_A ligt.
De onderhavige lijnen zijn daarmee dus concurrent in het punt A'. ◊

3. In figuur 10b zijn de bissectrices van driehoek ABC tevens de hoogtelijnen van driehoek $A'B'C'$. ◊

9. Met koordenvierhoeken

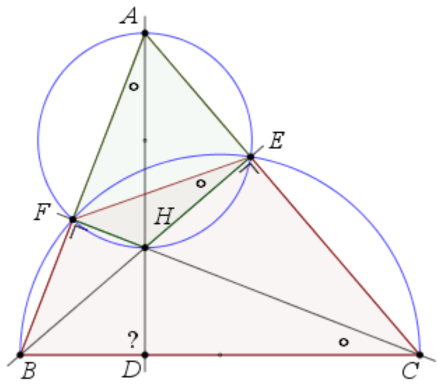
In figuur 11 zijn BE en CF hoogtelijnen; $H = BE$ & CF.
Verder is AH & $BC = D$.

Nu moet worden aangetoond dat $\angle ADB = 90°$.

In de koordenvierhoek $BCEF$ is $\angle FCB = \angle FEB = \frac{1}{2}\mathrm{bg}(BF)$.

In de koordenvierhoek $AFHE$ is $\angle FEH = \angle HAF = \frac{1}{2}\mathrm{bg}(HF)$.

figuur 11



De driehoeken *ABD* en *CBF* hebben hoek *B* gemeenschappelijk, terwijl $\angle BAD = \angle BCF$.
De derde hoeken in die driehoeken zijn dus eveneens aan elkaar gelijk:
- $\angle BFC = 90^\circ = \angle BDA$

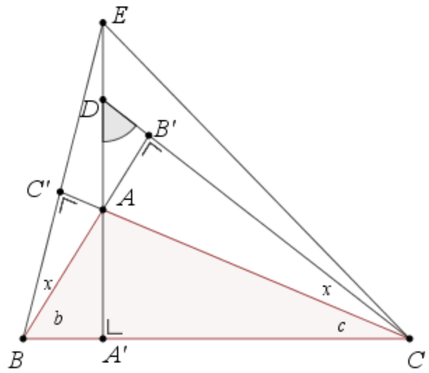
En daarmee is ook *AD* (die door het punt *H* gaat) een hoogtelijn van driehoek *ABC*. ◊

10. Uitgaande van een stomphoekige driehoek

Het volgende 'bewijs' voor de concurrentie van de hoogtelijnen van een driehoek is mogelijk het oudste. Het is afkomstig van William Chapple (1718-1781, Engeland) [9] en gepubliceerd in een tijdschrift (omstreeks 1749).
Het bewijs van Chapple is niet zo geformuleerd als heden ten dage gebruikelijk is. Ik volg hieronder Chapple's bewijs min of meer in verkorte vorm, met hier en daar een aanpassing.

In een willekeurige *stomphoekige* driehoek *ABC* worden de zijden *BA* en *CA* verlengd tot *BC'* en *CB'*, en worden de hoogtelijnen *BB'*, *CC'*, *AA'* getekend. Ook is *BC'* & *A'A* = *E* en *CB'* & *A'A* = *D*.

figuur 12



Als de hoogtelijnen door hetzelfde punt zouden gaan, dan zouden de punten *D* en *E* samenvallen.
Stel nu dat dat *niet* zo is.
Nu is met $\angle ABC = b$, $\angle BCA = c$ en $\angle B'BC' = \angle C'CB' = x$:
- $\angle AEB = 90^\circ - b - x$
- $\angle ADC = 90^\circ - c - x$

De som van die hoeken in de veelhoek *BCDE* bij de hoekpunten is daarbij gelijk aan 180º.
En dit is ook het geval als *D* en *E* zouden samenvallen.

Als echter punt *D* op de lijn *AE* (verder) van *E* verwijderd wordt, dan wordt hoek *ADC* hoe dan ook kleiner dan hoek *AEC*. En daarmee is het duidelijk dat de punten *D* en *E* samenvallen. Met als gevolg dat de loodlijnen *AA'*, *BB'*, *CC'* elkaar in hetzelfde punt snijden.
Dit geeft een scherphoekige driehoek op de basis *BC*, en daarom geldt dit bewijs voor een stomphoekige én een scherphoekige driehoek. ◊

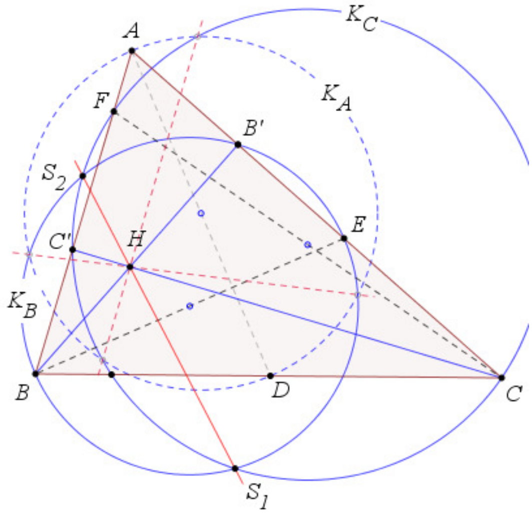
Opmerking. De lezer vergelijke figuur 12 met figuur 2b. ◊

11. Met drie cevianen

Door elk hoekpunt van de driehoek wordt één ceviaan getekend; zie daarvoor figuur 13a, waarin *AD*, *BE*, *CF* de bedoelde cevianen zijn van de driehoek *ABC*.

Ik gebruik vooralsnog alleen de cevianen *BE* en *CE*.
Met deze lijnstukken als middellijn zijn de cirkels K_B en K_C getekend die elkaar snijden in de punten S_1 en S_2 – de lijn S_1S_2 is de zogeheten *machtlijn* van de K_B en K_C.

figuur 13a



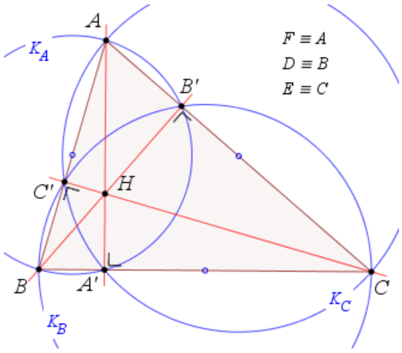
Cirkel K_B snijdt de zijde CA ook in het punt B' en cirkel K_C snijdt AB ook in het punt C'. De hoeken $EB'B$ en $FC'C$ zijn recht omdat K_B en K_C beide *Thales-cirkels* zijn.
Verder is BB' & $CC' = H$.

Ik zal bewijzen dat de lijn S_1S_2 ook door H gaat.
De driehoeken BHC' en CHB' zijn gelijkvormig (*hh*), zodat:

- $BH : CH = HC' : HB'$ of $BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$

Het linker- en rechterlid van de laatste uitdrukking zijn (de absolute waarde van) de zogeheten *machten* van het punt H bij K_B en bij K_C.
Omdat deze machten gelijk zijn, ligt het punt H op de machtlijn S_1S_2 van de beide cirkels. [10]
Indien nu ook de cirkel K_A waarvan de ceviaan AD middellijn in de beschouwing wordt betrokken, blijkt dat het punt H niet alleen *machtpunt* is van de drie cirkels, maar ook hoogtepunt van driehoek ABC.
Immers, *de machtlijnen van drie cirkels waarvan de middelpunten niet collineair zijn, gaan door één punt, het machtpunt van die cirkels* (zie weer [10]). ◊

figuur 13b



Opmerking. Ook de zijden van driehoek ABC kunnen worden opgevat als cevianen. De cirkels met de zijden als middellijn hebben dus twee aan twee een hoogtelijn van de driehoek als machtlijn. [11]

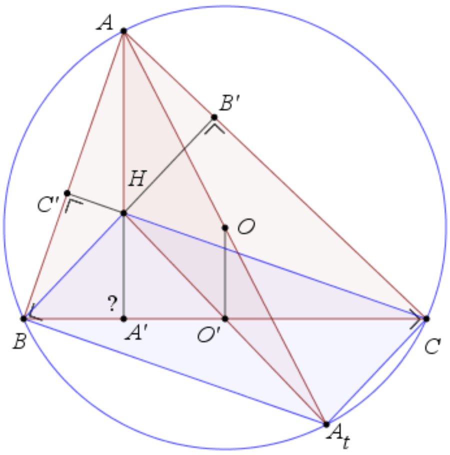
En hieruit volgt dan direct een bekende eigenschap van de stukken waarin het punt H elk van de hoogtelijnen verdeelt:

- $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$ ◊

12. Met een parallellogram

In figuur 14 zijn de lijnen BB' en CC' hoogtelijnen en is BB' & $CC' = H$. Het ‘tegenpunt’ van A op de omcirkel van driehoek ABC (middelpunt O) is het punt A_t.
De driehoeken ABA_t en ACA_t zijn rechthoekig in B resp. C (het zijn *Thales-driehoeken*).

figuur 14



Omdat $A_tC \perp AC$ én $A_tC \,//\, BH$ en ook $A_tB \perp AB$ én $A_tB \,//\, CH$ is vierhoek BA_tCH een parallellogram met diagonalen BC en A_tH. Het midden van BC is $O' = BC$ & A_tH waarmee OO' loodrecht staat op BC.
Het midden van A_tH is eveneens O' waarmee in driehoek AHA_t de lijn OO' middenparallel is (zie ook opmerking 1 aan het einde van paragraaf 7). [12]
En daarmee is $AH \,//\, OO'$ en dus is ook $AH \perp BC$.

En dan is het natuurlijk niet nodig om op te merken dat daarmee de lijn AH óók een hoogtelijn is van driehoek ABC.

Dus – en dit keer tot slot: stelling 1 is juist. Maar er zijn vast wel meer bewijzen…

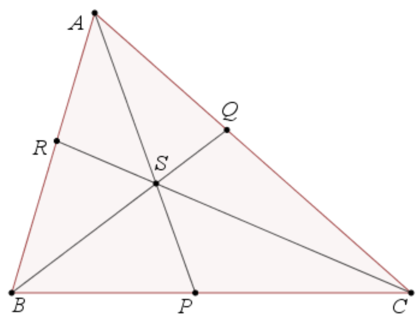
13. Noten

[1] Zie bijvoorbeeld:
» Roger A. Johnson (1929): *Advanced Euclidean Geometry*. Mineola (N.Y., USA): Dover Publications; reprint in 2007, pp. 165-168.
Of: WikipediA EN c.q. Wikipedia NL op:
https://en.wikipedia.org/wiki/Orthocentric_system c.q. *https://nl.wikipedia.org/wiki/Hoogtepuntssysteem*

[2] Met $P = A$ & B wordt in hetgeen volgt bedoeld: P is het (een) gemeenschappelijk punt van de meetkundige objecten A en B.

[3] De stelling van Ceva kan ook worden bewezen door gebruik te maken van oppervlaktes van bepaalde deeldriehoeken van driehoek ABC.

Bij het volgende bewijs wordt gebruik gemaakt van het feit dat de oppervlaktes van twee driehoeken met dezelfde hoogte zich verhouden als de lengtes van hun bases.
Ik gebruik Φ als oppervlaktefunctie van een driehoek; d.w.z. dat de waarde van $\Phi(PQR)$ de oppervlakte is van driehoek PQR.



Er geldt:

$$\frac{\Phi(BSP)}{\Phi(CSP)} = \frac{BP}{CP} = \frac{\Phi(ABP)}{\Phi(ACP)}$$

En dan is ook:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\Phi(ABP) - \Phi(BSP)}{\Phi(ACP) - \Phi(CSP)} = \frac{\Phi(ABS)}{\Phi(ACS)}$$

Analoog kan worden afgeleid dat:

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{\Phi(BCS)}{\Phi(BAS)} \quad \text{en} \quad \frac{AR}{BR} = \frac{\Phi(CAS)}{\Phi(CBS)}$$

En dan blijkt na vermenigvuldiging dat $\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1$.

[4] Per definitie geldt voor het *inwendig product* (*inproduct* of *scalair product*) van de vectoren $\overline{OA}$ en $\overline{OB}$:
$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = |\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}| \cdot \cos\varphi$

waarbij $|\overline{OA}|, |\overline{OB}|$ de lengtes (norm) zijn van die vectoren en φ de hoek tussen de halve lijnen die de dragers zijn van de vectoren. De lengte van het *lijnstuk* OA schrijf ik in dit geval als $|OA|$.

Op grond hiervan is $\overline{OA} \cdot \overline{OA} = \overline{OA}^2 = |\overline{OA}| \cdot |\overline{OA}| \cdot \cos 0^\circ = |OA|^2$.
Zie ook:
https://nl.wikipedia.org/wiki/Inwendig_product

[5] Ik gebruik hier $x^t = p - qi$ in plaats van de gebruikelijke notatie voor de *toegevoegde* van een complex getal $x = p + qi$.
Nu is dus $x \cdot x^t = (p + qi)(p - qi) = p^2 + q^2 = |x|^2$.

[6] Zie:
» Dick Klingens (2007): *Isogonale verwantschap, antiparallel, punt van Lemoine*. Op (de website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/isogon.htm

[7] Ik ga er hierbij vanzelfsprekend van uit dat bekend is dat het zwaartepunt van een driehoek elke zwaartelijn verdeelt in stukken die zich verhouden als 2 : 1, en ook dat bij een rotatie over een hoek van 180° en een vermenigvuldiging origineel en beeld van een lijn (of lijnstuk) evenwijdig zijn.

[8] Met $d(P, Q)$ wordt de functie bedoeld die de afstand vastlegt tussen de meetkundige objecten P en Q.

[9] Zie *British Dictionary of National Biography*, volume X:
https://en.wikisource.org/wiki/Chapple,_William_(1718-1781)_(DNB00)

[10] Voor een beschouwing over een en ander zie bijvoorbeeld:
» Dick Klingens (2006): *De macht van een punt tov. een cirkel*. Op (de website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/machtpunt.htm

[11] Dus: de macht van het hoogtepunt H van een driehoek bij een cirkel beschreven op een zijde van die driehoek is (afgezien van het teken) gelijk aan het product van de (lengtes van de) stukken waarin H een hoogtelijn verdeelt.

[12] Gevolg. Omdat OO' middenparallel is in driehoek AHA_t, is $OO' = \frac{1}{2}AH$: de afstand van O tot de zijde AC is de helft van het bovenste hoogtelijnstuk AH. Zie ook het bewijs in paragraaf 7.2.

14. Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*) was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).
Website: *http://www.pandd.nl*

=====

versie 0.1 – september 2006 versie 1.0 … 1.4 – oktober, november 2007
versie 2.0 – oktober 2008 versie 2.1 … 2.3 – januari 2018

=====