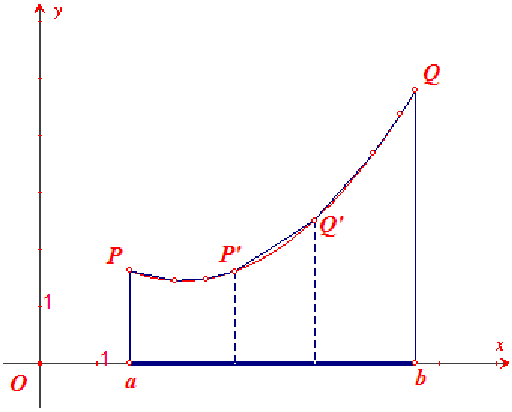
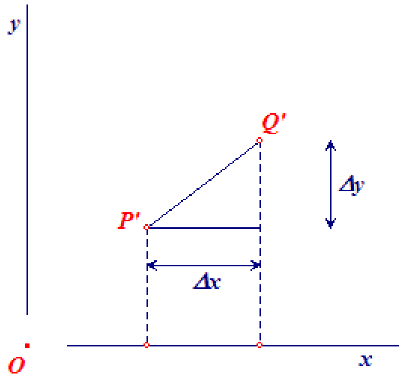
Over de functies arcsin, arccos en arctan

1. Booglengte

figuur 1



figuur 2



De grafiek van een functie *f* tussen twee punten *P* (met $x = a$) en *Q* (met $x = b$) kan worden opgedeeld in stukjes die kunnen worden opgevat als lijnstukken, indien deze lijnstukken althans 'voldoende klein' zijn (zie figuur 1).

Voor zo'n lijnstuk $P'Q'$ (zie figuur 2) hebben we dan $P'Q' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Geven we de lengte van de boog *PQ* op het interval $[a\,;\,b]$ aan met *s*, dan kunnen we *s* schrijven als Riemann-som:

$$s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_k P_k Q_k$$

waarbij de lijnstukken P_kQ_k overeenkomen met lijnstukken $P'Q'$ met alle *dezelfde* Δx (klein genoeg gekozen).

De waarde van *s* wordt de **booglengte** van de boog *PQ* genoemd.

Nu is:

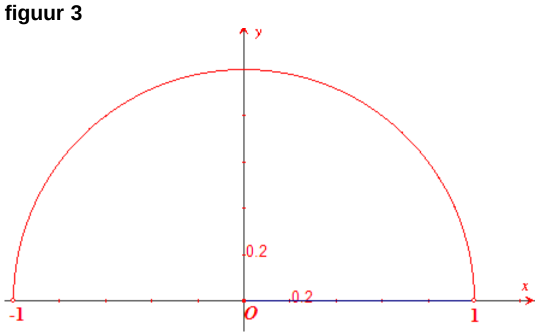
$$P_kQ_k = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Zodat dan (via de limietovergang van de Riemann-som):

$$s_{PQ} = s_{[a;b]} = \int_b^a \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, \mathrm{d}\,x$$

2. Niet zo maar een voorbeeld

figuur 3



We bekijken als voorbeeld de functie

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

De grafiek van de functie *f* is een halve cirkel met middelpunt *O* en straal 1 (zie figuur 3).

Voor de lengte van deze halve cirkel vinden we met de formule $\text{Omtrek}(\textit{cirkel}) = 2\pi R$ eenvoudig:

$$s = s_{[-1;\,1]} = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 = \pi$$

De waarde van de integraal $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, \mathrm{d}\,x$ is dus reeds bij voorbaat bekend!

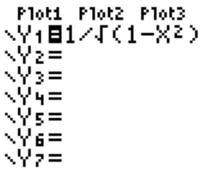
Hierbij is $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ met $\left(f'(x)\right)^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$, zodat

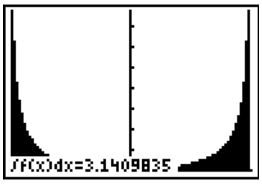
$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

en dus:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}\,x = \pi$$

figuur 4





Ga met behulp van je grafische rekenmachine na, dat $I \approx \pi$.

Echter: een primitieve van de functie $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (en die bestaat, zoals we later zullen zien!) kunnen we (nog) niet vinden. Ga dat na!

3. De grafiek van *f*, maar dan anders

We kunnen de halve cirkel ook beschrijven met behulp van een parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

waarbij t loopt van $t = 0$ naar $t = \pi$. Merk op dat hierdoor de x-as *van rechts naar links* wordt doorlopen!

We kunnen nu differentiëren naar t:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t$$

waaruit dan volgt dat $f'(x) = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y/\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x/\mathrm{d}\,t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$.

Let wel, hierbij is de functie f (zelf afhankelijk van x) uitgedrukt in de variabele t.

Voor $1 + \left(f\,'(x)\right)^2$ vinden we dan:

$$1 + \left(f\,'(x)\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

Nb. Willen we de integraal berekenen met de variabele t, dan moeten we ons realiseren, dat daarin '$\mathrm{d}\,x$' afkomstig was van 'Δx' (uit de Riemann-som).
De relatie $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$ is dan afkomstig van $\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\sin t$, zodat: $\Delta x = -\sin t \cdot \Delta t$.
En dan is dus ook: $\mathrm{d}\,x = -\sin t\, \mathrm{d}\,t$.

Zoals opgemerkt wordt de cirkelboog (bij gebruik van t) doorlopen van rechts naar links. Hiermee rekening houdend (zie het minteken in derde lid) vinden we:

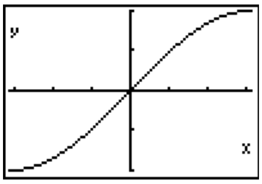
$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}\,x=-\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}}\cdot(-\sin t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{\pi}1\cdot\mathrm{d}\,t=[t]_0^{\pi}=(\pi)-(0)=\pi$$

't Klopt dus in dit geval ook via de integraalrekening!

Maar we blijven zitten met het feit dat we toch ook $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$ graag *direct*, en we bedoelen daarmee ***via een primitieve***, zouden willen integreren.
Daartoe introduceren we een ***nieuwe*** **functie**!

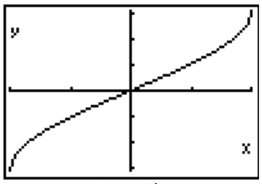
We bekijken allereerst de functie $h(x)=\sin x$, waarbij we x kiezen in het interval $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
We beperken dus het domein van de functie sin x.
De functie h heeft dan een inverse functie h^{inv} (waarom?), waarvan de grafiek de gespiegelde is van de grafiek van h in de lijn met vergelijking $y = x$ (zie de figuren 5a en 5b).

figuur 5a



sin x

figuur 5b



$(\sin x)^{\text{inv}}$

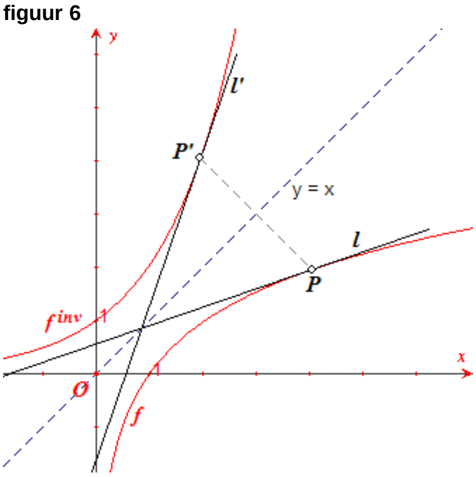
4. De nieuwe functie: arcsin

We geven de functie h^{inv} de naam **arcsin** (in het Nederlands taalgebied ook wel **bgsin**), wat we uitspreken als 'arcsinus' (van het Latijnse *arcus sinus*; *arcus* betekent *boog*) of 'boogsinus'.

Merk op dat de uitdrukkingen sin $x = y$ en x = arcsin y nu 'hetzelfde' betekenen.
Daarom spreken we 'x = arcsin y' soms ook wel uit als 'x is de hoek waarvan de sinus gelijk is aan y'.

En vervolgens…
We kunnen nu, zoals we zullen zien, de afgeleide van de functie $\boldsymbol{y}$ **= arcsin** $\boldsymbol{x}$ eenvoudig vinden.

figuur 6



Ga echter eerst na, dat voor een functie f en diens inverse f^{inv} in het algemeen geldt (zie figuur 6):

$$(f^{\text{inv}})'=\frac{1}{f'}$$

met *rolwisseling* van de x en de y !
Aanwijzing. Kijk naar de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen l en l' in de punten P en P' aan opvolgend de grafieken van de functies f en f^{inv}.

Voor y = arcsin x is dan (let op de rolwisseling van x en y):

$$y' = (\arcsin x)' = (\sin^{\text{inv}} x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

Maar y = arcsin x betekent hetzelfde als **sin *y* = *x***, waarmee we via $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ vinden dat:

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$$

zodat:

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Ga na dat het minteken hier niet van toepassing is – de functie arcsin x is een stijgende functie (waarom?), dus …

En dan is: $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Anders gezegd: Voor de functie $f(x) = \arcsin x$ geldt: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Of ook:

De functie $F(x) = \arcsin x$ is een primitieve van de functie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

En dan kunnen we met deze primitieve de waarde van s, de lengte van een halve cirkel met straal 1, berekenen:

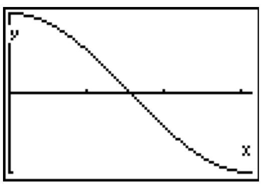
$$s = I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [\arcsin x]_{-1}^{1} = (\arcsin 1) - (\arcsin(-1)) = (\tfrac{\pi}{2}) - (-\tfrac{\pi}{2}) = \pi$$

5. De functies arccos en arctan

Ook de functie $g(x) = \cos x$ met x in $[0;\pi]$ heeft een inverse (zie figuur 7a en 7b):

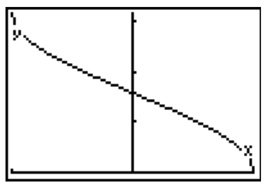
$$g^{\text{inv}}(x) = y = \arccos x$$

figuur 7a



cos *x*

figuur 7b



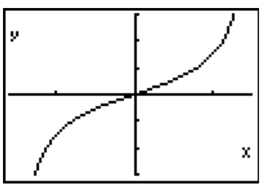
arccos *x*

Voor de afgeleide van g vinden we op dezelfde manier als hierboven bij arcsin x en rekening houdend met cos y = x:

$$(\arccos x)' = (\cos^{\text{inv}} x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

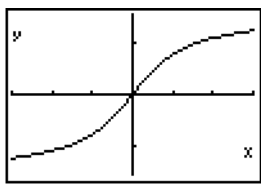
Natuurlijk kunnen we ook voor de functie **tan *x*** een inverse vinden…

figuur 8a



tan *x*

figuur 8b



arctan *x*

We kiezen hiervoor het domein $\left\langle -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$; zie de figuren 8a en 8b:

$$\mathbf{tan}^{\text{inv}}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{arctan}\, \boldsymbol{x}$$

Voor de afgeleide krijgen we dan (in de wetenschap dat uit y = arctan x volgt dat x = tan y):

$$(\arctan x)' = (\tan^{\text{inv}} x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y$$

We moeten nu $\cos^2 y$ uitdrukken in x. Dat gaat op de volgende manier:

$$x^2 = \tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

En hieruit volgt dan $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2$, zodat $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$.

We hebben dan: $$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

6. Samenvattend

functie	domein	bereik	afgeleide
arcsin	[-1 ; 1]	$[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos	[-1 ; 1]	$[0 ; \pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan	$\langle -\infty ; \infty \rangle$	$\left\langle -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opmerking. De functies arcsin, arccos en arctan behoren tot de zogenoemde **cyclometrische** functies. 'Cyclometrisch' komt van het Griekse κυκλος (kuklos) = cirkel en μετρειν (metrein) = meten.

